

k -空間と列型空間の一般化としての $\mathcal{C}_\varphi$ -空間

ykyki

2025 年 7 月 17 日

はじめに

本誌では、 k -空間と列型空間の一般化について考察する。この 2 種類の空間は一見すると共通点がないように見えるが、実際には同じ抽象的枠組みで統一的に理解できる。この枠組みが $\mathcal{C}_\varphi$ -空間の理論である。

従来、 k -空間は「コンパクト部分集合から自身の位相が定まる空間」として、列型空間は「点列の収束によって位相が定まる空間 (の一種)」として研究されてきた。定義自体は異なるが、この 2 つの空間の間にはアナロジーが存在することが知られていた。これは [児玉永見] 第 9 章のトピックのひとつである。

k -空間と列型空間を統一的に扱う枠組みが [ELS04] において次のように与えられた。ある位相空間のクラス $\mathcal{C}$ を固定した際に「 $\mathcal{C}$ に属する空間からの連続写像によって特徴づけられる空間」として $\mathcal{C}$ -生成空間という位相的性質を定義する。この観点から見ると、 k -空間は $\mathcal{C}$ をコンパクト Hausdorff 空間全体のクラスとした場合、列型空間は $\mathcal{C}$ を離散空間 $\mathbb{N}$ の一点コンパクト化 $\mathbb{N}^*$ のみからなるクラスとした場合に対応していることがわかる。

この $\mathcal{C}$ -生成空間についての一般論とその応用を本誌では展開する。議論の流れを見やすくするため、独自の用語や記法をいくつか導入しており、 $\mathcal{C}$ -生成空間は本誌では $\mathcal{C}_\varphi$ -空間と呼ばれる。表記自体は新しいが、基本的なアイデアは k -空間や列型空間で知られた内容に依拠しているものが多い。この 2 つの空間についてよく知られた性質を $\mathcal{C}_\varphi$ -空間の枠組みで再定式化することで、より一般的な見地からの理解を深めることが本誌の目的である。

第 1 章では、 $\mathcal{C}_\varphi$ -空間の定義とその性質を述べる。この章での議論は、特定の空間クラス $\mathcal{C}$ に依存しない一般的な結果として定式化される。また補助的に $\mathcal{C}_\eta$ -空間という概念も導入する。 k -空間の定義には 2 つの異なるものが知られており、テストマップによるものと弱位相によるものがある。前者が $\mathcal{C}_\varphi$ -空間に、後者が $\mathcal{C}_\eta$ -空間に対応する。 k -空間については、Hausdorff 空間という仮定の下ではこの 2 つの定義が同値になることは容易に証明できる。 $\mathcal{C}_\varphi$ -空間と $\mathcal{C}_\eta$ -空間についても、適当な条件が課された場合には同値になることを示す。

第 2 章では、具体的な空間クラス $\mathcal{C}$ について $\mathcal{C}_\varphi$ -空間の各論を述べる。列型空間と k -空間の古典的な性質が、一般論の特殊化として自然に導かれることを示す。また、これらの空間における分離公理や積空間の性質についても論じる。

第 3 章では、位相空間の具体例を紹介する。 $\mathbb{Q}$ の一点コンパクト化 $\mathbb{Q}^*$ やその積空間、 Arens-Fort 空間などの病的な例を通じて、抽象論の有効性を確認しつつ、一般論の限界や輪郭を明確にしていく。

前提知識としては [森田 81] 程度を想定している。 [児玉永見] や k -空間、列型空間について知っていることを仮定していない。基本的な用語や定義については付録 A でいくつか補足しているので、必要に応じて参照してほしい。それでも不明な用語があれば [Eng89] を見られたい。

本誌で扱うことができなかったトピックとして、関数空間がある。 k -空間や列型空間について、それらの関数空間の位相がよい振る舞いをもつことが知られている。この話題についても、いずれ執筆したいと考えている。興味のある読者は [ELS04] や [Gou13] などを見られたい。

本誌の執筆は、2023 年 7 月から KC さんと 2 人で行った [児玉永見] 第 9 章の勉強会での議論がきっかけとなっている。そこで提起された問題意識を出発点として、より一般的な理論的枠組みの構築を試みた。

目次

第 1 章	$\mathcal{C}_\varphi$ -空間の一般論	7
1.1	テストマップと $\mathcal{C}_\varphi$ -空間	8
1.2	弱位相と $\mathcal{C}_\eta$ -空間	15
1.3	$\mathcal{C}_\varphi$ -分離性	18
1.4	$\mathcal{C}_\varphi$ -空間の構成	22
第 2 章	$\mathcal{C}_\varphi$ -空間の各論	25
2.1	列型空間とその亜種	25
2.2	k -空間とその亜種	28
第 3 章	具体例集	31
3.1	$\mathbb{Q}$ の一点コンパクト化 $\mathbb{Q}^*$	31
3.2	$\mathbb{Q}$ の一点コンパクト化の積 $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$	32
3.3	2 の非可算積 2^{ω_1}	33
3.4	ω の非可算積 ω^{ω_1}	33
3.5	Arens-Fort 空間	35
付録 A	関連用語	37
A.1	諸定義	37
A.2	一点コンパクト化	38
A.3	商写像と弱位相	39
A.4	固有写像	40
索引		43

第 1 章

$\mathcal{C}_\varphi$ -空間の一般論

位相空間のクラス $\mathcal{C}$ を任意にひとつ固定する. このクラス $\mathcal{C}$ に対するテストマップやテスト集合といった概念を導入する. 任意の位相空間 X について, テストマップから誘導される位相がある. その位相がもとの位相と一致しているとき, X は $\mathcal{C}_\varphi$ -空間であると定義される. クラス $\mathcal{C}$ を具体的に与えたときの $\mathcal{C}_\varphi$ -空間の例として, k -空間や列型空間がある. 本章では $\mathcal{C}_\varphi$ -空間の一般論を述べる.

この章を通していくつもの用語と具体例を与える. 読者が全体を俯瞰できるように, 始めに一覧表表 1.1 を提示しておく. 表中の用語や記号の定義は追って本章や次章で説明する.

表 1.1 $\mathcal{C}_\varphi$ -空間に関する用語一覧表

$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}_\varphi$ -空間	$\mathcal{C}_\varphi$ -Hausdorff	$\mathcal{C}_\varphi$ -普遍閉
CptHaus	k -空間	k -Hausdorff	k -普遍閉
Cpt	?	?	KC-空間
Haus	Top (命題 1.1.12)	Haus	離散空間
$\mathbb{N}^*$	列型空間	点列 Hausdorff	s -普遍閉
可算な位相空間	可算密度をもつ空間	?	可算集合が閉
Top	Top	Haus	離散空間
$2'$	命題 1.1.10	T_0 -空間 (命題 1.3.5)	T_1 -空間
$\mathbb{S}$	命題 1.1.11	T_1 -空間 (命題 1.3.6)	T_1 -空間
2	離散空間	Top	T_1 -空間
離散空間	離散空間	Top	離散空間
P-空間	P-空間	?	?
局所連結空間	局所連結空間	?	?

1.1 テストマップと $\mathcal{C}_\varphi$ -空間

位相空間 X に対し, クラス $\mathcal{C}$ に属する空間 K から X への連続写像 $t: K \rightarrow X$ のことを $\mathcal{C}$ -テストマップ ($\mathcal{C}$ -test map) という. 文脈から $\mathcal{C}$ が明らかな場合は単にテストマップともいう. 部分集合 $A \subseteq X$ が $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合であるとは, 任意のテストマップ $t: K \rightarrow X$ に対し, 逆像 $t^{-1}[A]$ が K の閉集合であることをいう^{*1}. 同様に $\mathcal{C}_\varphi$ -開集合も定義される. 定義より $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合の補集合は $\mathcal{C}_\varphi$ -開である. 逆に $\mathcal{C}_\varphi$ -開集合は $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合の補集合である. 閉集合は $\mathcal{C}_\varphi$ -閉であり, 開集合は $\mathcal{C}_\varphi$ -開である.

位相空間 X に対し, $\mathcal{C}_\varphi$ -開集合全体の集合は集合 X 上で開集合系の公理をみたす. 同様に, $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合全体の集合は閉集合系の公理をみたす. どちらも同じ位相を定める. この位相を備えた空間を $\mathcal{C}_\varphi X$ で表す. $\mathcal{C}_\varphi X$ の開集合とは X の $\mathcal{C}_\varphi$ -開集合に他ならない. 空間 $\mathcal{C}_\varphi X$ は元の位相空間 X よりも細かい位相を持っている. つまり恒等写像 $\mathcal{C}_\varphi X \rightarrow X$ は連続である. この 2 つの位相は一致するとは限らない. しかし一致するとき, X は $\mathcal{C}_\varphi$ -空間であるという. これは恒等写像 $\mathcal{C}_\varphi X \rightarrow X$ が同相写像ということと同じであり, $\mathcal{C}_\varphi X = X$ と表現できる. 他にも $\mathcal{C}$ -生成空間 ($\mathcal{C}$ -generated space) という呼称があり, そちらの方が一般的である (例えば [ELS04], [Gou13] など). 後続の第 1.2 節において, 類似概念である $\mathcal{C}_\eta$ -空間の定義を導入し比較するため, $\mathcal{C}_\varphi$ -空間という独自の表記を採用している.

位相空間の間の連続とは限らない写像 $f: X \rightarrow Y$ が $\mathcal{C}_\varphi$ -連続写像 ($\mathcal{C}_\varphi$ -continuous map) であるとは, 任意のテストマップ $t: K \rightarrow X$ について合成写像 $K \xrightarrow{t} X \xrightarrow{f} Y$ が連続であることをいう. 定義より連続写像は $\mathcal{C}_\varphi$ -連続である. また $\mathcal{C}_\varphi$ -連続写像の合成も $\mathcal{C}_\varphi$ -連続である. 位相空間の間の連続写像全体の集合を $C(X, Y)$, $\mathcal{C}_\varphi$ -連続写像全体の集合を $\mathcal{C}_\varphi(X, Y)$ と書くことにする. 連続写像は $\mathcal{C}_\varphi$ -連続なので $C(X, Y) \subseteq \mathcal{C}_\varphi(X, Y)$ である.

クラス $\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}_\varphi$ -空間という性質を定義した. $\mathcal{C}_\varphi$ -空間全体を集めると新たなクラスとなり, これを $\mathcal{C}_\varphi$ と書くことにする. このクラス $\mathcal{C}_\varphi$ に今までの定義を再び適用することで, $\mathcal{C}_{\varphi\varphi}$ -閉集合や $\mathcal{C}_{\varphi\varphi}$ -連続写像, $\mathcal{C}_{\varphi\varphi}$ -空間, クラス $\mathcal{C}_{\varphi\varphi}$ といった数学的対象が得られる. しかし後述の系 1.1.5 からわかるように, $\mathcal{C}_{\varphi\varphi}$ -空間は $\mathcal{C}_\varphi$ -空間に一致する. つまり, クラス $\mathcal{C}$ からクラス $\mathcal{C}_\varphi$ を構成する操作は冪等である.

命題 1.1.1. クラス $\mathcal{C}$ に属する空間は $\mathcal{C}_\varphi$ -空間である. つまり $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_\varphi$ である. □

証明. 恒等写像 $X \rightarrow X$ がテストマップであるため, $\mathcal{C}_\varphi$ -閉ならば閉であることがわかる. ■

命題 1.1.2. テストマップ $t: K \rightarrow X$ に対し, $t'(x) = t(x)$ で定義される写像 $t': K \rightarrow \mathcal{C}_\varphi X$

^{*1} φ という添字に深い意味はない. α, β, γ などのジェネリックなものを避けただけである. φ は “functional” の頭文字 f を意識している.

もテストマップになる. □

証明. Straightforward. $A \subseteq \mathcal{C}_\varphi X$ が閉集合, つまり A が X の $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合であるとする. 仮定より $t'^{-1}[A] = t^{-1}[A]$ は K の閉集合である. よって t' は連続である. ■

命題 1.1.3. 位相空間 X に対し, $\mathcal{C}_\varphi X$ は $\mathcal{C}_\varphi$ -空間である. このことは $\mathcal{C}_\varphi^2 X = \mathcal{C}_\varphi(\mathcal{C}_\varphi X) = \mathcal{C}_\varphi X$ とも表せる. □

証明. 部分集合 $A \subseteq \mathcal{C}_\varphi X$ を $\mathcal{C}_\varphi X$ の $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合であるとする. A が $\mathcal{C}_\varphi X$ の閉集合であること, つまり A が X の $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合であることを示せばよい. 任意にテストマップ $t: K \rightarrow X$ をとる. このとき **命題 1.1.2** より $t': K \rightarrow \mathcal{C}_\varphi X$ はテストマップである. よって $t^{-1}[A] = t'^{-1}[A]$ は K の閉集合である. ■

2つのクラス $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ について, 包含関係 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ が成り立っているとする. 定義より $\mathcal{C}$ -テストマップは $\mathcal{D}$ -テストマップであり, $\mathcal{D}_\varphi$ -閉集合は $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合である. よって $\mathcal{C}_\varphi$ -空間は $\mathcal{D}_\varphi$ -空間である. つまり $\mathcal{C}_\varphi \subseteq \mathcal{D}_\varphi$ である. また $\mathcal{D}_\varphi$ -連続写像は $\mathcal{C}_\varphi$ -連続写像である. 後述するが, 実はこれらの主張はより弱い仮定 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}_\varphi$ の下でも成り立つ.

命題 1.1.4. 位相空間 X の部分集合 A が $\mathcal{C}_{\varphi\varphi}$ -閉集合であることは, $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合であることに等しい. □

証明. Straightforward. **命題 1.1.1** より $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_\varphi$ が成り立つことから, $\mathcal{C}_\varphi \subseteq \mathcal{C}_{\varphi\varphi}$ である. よって $\mathcal{C}_{\varphi\varphi}$ -閉集合は $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合である. 逆を示す. 部分集合 $A \subseteq X$ が $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合だとする. 任意に $\mathcal{C}_{\varphi\varphi}$ -テストマップ $t: K \rightarrow X$ をとる. $t^{-1}[A]$ が閉集合であることを示したい. $K \in \mathcal{C}_\varphi$ であるから, $t^{-1}[A]$ が $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合であることを証明すればよい. 任意に $\mathcal{C}$ -テストマップ $s: L \rightarrow K$ をとる. 集合 $s^{-1}[t^{-1}[A]] = (ts)^{-1}[A]$ は A が $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合であることから閉集合である. よって $t^{-1}[A]$ は $\mathcal{C}_{\varphi\varphi}$ -閉集合である. ■

系 1.1.5. 位相空間 X について $\mathcal{C}_{\varphi\varphi} X = \mathcal{C}_\varphi X$ が成り立つ. またクラスの等号 $\mathcal{C}_{\varphi\varphi} = \mathcal{C}_\varphi$ も成立する. ■

命題 1.1.6. $\mathcal{C}_\varphi$ -空間 X と位相空間 Y の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ について以下は同値:

- (1) f が連続である.
- (2) 写像 $f': X \rightarrow \mathcal{C}_\varphi Y; x \mapsto f(x)$ が連続である.

つまり $\mathcal{C}_\varphi$ -空間 X について全単射 $C(X, \mathcal{C}_\varphi Y) \cong C(X, Y)$ が自然に成り立つ. □

証明. まず X が $\mathcal{C}$ に属する場合に主張が成り立つことを示す. これは **命題 1.1.2** から従う.

次に X が $\mathcal{C}_\varphi$ -空間である場合を考える. このとき $X \in \mathcal{C}_\varphi$ である. そこでクラス $\mathcal{C}_\varphi$ について前段落の主張を適用することで, f の連続性と $f': X \rightarrow \mathcal{C}_{\varphi\varphi} Y$ の連続性が同値であることが

わかる. $\mathcal{C}_{\varphi\varphi}Y = \mathcal{C}_\varphi Y$ であったから, 結局 (1) と (2) は同値である. ■

命題 1.1.7. 位相空間 X, Y の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ について以下は同値:

- (1) f が $\mathcal{C}_\varphi$ -連続写像である.
- (2) 写像 $f': \mathcal{C}_\varphi X \rightarrow Y; x \mapsto f(x)$ が連続である.

つまり全単射 $\mathcal{C}_\varphi(X, Y) \cong C(\mathcal{C}_\varphi X, Y)$ が自然に成り立つ. 特に X が $\mathcal{C}_\varphi$ -空間であれば, $\mathcal{C}_\varphi$ -連続写像は単なる連続写像に他ならない. □

証明. Straightforward. 論理式

$(\forall t: K \rightarrow X : t \text{ はテストマップ}) (\forall B \subseteq Y : B \text{ は } Y \text{ の閉集合}) (t^{-1}[f^{-1}[B]] \text{ が } K \text{ の閉集合})$ を読み替えるだけである. ■

命題 1.1.8. 位相空間 X, Y の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ について以下は同値:

- (1) f が $\mathcal{C}_\varphi$ -連続写像である.
- (2) 写像 $f': \mathcal{C}_\varphi X \rightarrow \mathcal{C}_\varphi Y; x \mapsto f(x)$ が連続である. □

証明. 命題 1.1.6 と 命題 1.1.7 より従う. ■

命題 1.1.9. 位相空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ について以下は同値:

- (1) f が $\mathcal{C}_\varphi$ -連続写像である.
- (2) f が $\mathcal{C}_{\varphi\varphi}$ -連続写像である. □

証明. 系 1.1.5 と 命題 1.1.7 より従う. ■

2 つのクラス $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ について, 包含関係 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}_\varphi$ が成り立っているとする. このとき $\mathcal{C}_\varphi \subseteq \mathcal{D}_{\varphi\varphi} = \mathcal{D}_\varphi$ である. $\mathcal{C}_{\varphi\varphi}$ -閉や $\mathcal{C}_{\varphi\varphi}$ -連続といった条件が結局のところ $\mathcal{C}_\varphi$ -閉や $\mathcal{C}_\varphi$ -連続と同値であることを踏まえると, $\mathcal{D}_\varphi$ -閉集合は $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合であり, $\mathcal{C}_\varphi$ -空間は $\mathcal{D}_\varphi$ -空間であることがわかる. $\mathcal{C}$ -テストマップは必ずしも $\mathcal{D}$ -テストマップではないが, $\mathcal{D}_\varphi$ -連続写像は $\mathcal{C}_\varphi$ -連続写像である.

この辺りで具体例に目を向けておこう. その前にいくつか記号を導入しておく.

- **Top** は位相空間全体のクラス, あるいはその上の圏のことである.
- **Cpt** はコンパクト空間全体のクラス.
- **Haus** は Hausdorff 空間全体のクラス.
- **CptHaus** はコンパクト Hausdorff 空間全体のクラス.
- 2 は 2 点集合 $2 = \{0, 1\}$ に離散位相をいれた位相空間である.
- $2'$ は 2 点集合 $2 = \{0, 1\}$ に密着位相をいれた位相空間である.
- $\mathbb{S}$ は Sierpiński 空間と呼ばれる位相空間であり, 2 点集合 $2 = \{0, 1\}$ に $\{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$

を開集合族としたものである。

- $\mathbb{N}^*$ は離散空間 $\mathbb{N}$ を一点コンパクト化した位相空間である。付録 A も参照のこと。
- ひとつの位相空間 X からなるクラス $\mathcal{C} = \{X\}$ について、 $\{X\}_\varphi$ -閉集合や $\{X\}_\varphi$ -空間などのことを単純に X_φ -閉集合や X_φ -空間と略記する。

最も典型的な例が、クラス $\mathcal{C}$ を **CptHaus** とした場合である。このとき C_φ -空間は k -空間のことである。 C_φ -閉集合や C_φ -連続写像は、 k -閉集合や k -連続写像と呼ばれる。また別の例として、クラスを $\{\mathbb{N}^*\}$ とした場合がある。このとき C_φ -空間は $\mathbb{N}_\varphi^*$ -空間と表記されるが、これは列型空間と同値になる。本誌では k -空間や列型空間についての知識は前提としておらず、これら空間については第 2 章で別途解説する。

単純なクラスの場合についても見ておこう。まず $\mathcal{C}$ が位相空間全体であるとする。このとき任意の位相空間は C_φ -空間である。つまり $\mathbf{Top}_\varphi = \mathbf{Top}$ ということに他ならない。テストマップとは単に連続写像であり、 C_φ -閉集合とは単なる閉集合である。次に $\mathcal{C}$ を一点集合のみからなるクラスとする。このとき位相空間 X が C_φ -空間になることは離散位相であることに等しい。 C_φ -閉集合とは、 X の任意の部分集合のことである。この例から類推できるように、クラス $\mathcal{C}$ に離散空間をいくつか追加しても C_φ -閉集合などの条件に一切影響を与えない。同様の不変性が、クラス $\mathcal{C}$ に属する空間と同相な空間を $\mathcal{C}$ に追加した場合にも成り立つ。

空間 $2'$ からのテストマップとは、位相的同値な 2 点 a_0, a_1 を選び出すことに等しい*2。空間 $\mathbb{S}$ からのテストマップとは、 $a_0 \in \text{Cl}\{a_1\}$ となるような 2 点 a_0, a_1 を選び出すことに等しい。前段落の話より、 $2'_\varphi$ -空間のクラスは離散空間のクラスである。 $2'_\varphi$ -空間や $\mathbb{S}_\varphi$ -空間については事情が異なる。このことは下記の命題 (命題 1.1.10, 命題 1.1.11) から従う。さらに、クラスの包含関係 $2_\varphi \subseteq 2'_\varphi \subseteq \mathbb{S}_\varphi$ も成り立つことも導かれる。位相の強弱 $2' \leq \mathbb{S} \leq 2$ とクラスの包含関係とでは順序が同じにならないことに注意する。

命題 1.1.10. ([CW25]) 位相空間 X が $2'_\varphi$ -空間であるための必要十分条件は、 X の開集合が常に閉集合になることである*3。 □

証明. 空間 $2'$ において開集合であることと閉集合であることは同値である。よって $2'_\varphi$ -開集合であることは $2'_\varphi$ -閉集合であることに等しい。したがって、 $2'_\varphi$ -空間において開集合は閉集合である。逆を示す。仮定より任意の点 $a \in X$ に対し、閉包 $\text{Cl}\{a\}$ は a を含む最小の開集合である。よって任意の 2 点 a, b に対し、 $b \in \text{Cl}\{a\}$ ならば $a \in \text{Cl}\{b\}$ が成り立つ。ゆえに任意の $2'_\varphi$ -開集合 A とその点 a に対し、 $\text{Cl}\{a\} \subseteq A$ が成り立つ。再び仮定より $\text{Cl}\{a\}$ は点 a の開近傍なので、 A は開集合である。 ■

*2 位相的同値の定義については付録 A を参照のこと。

*3 直ちにわかるように、これは閉集合が常に開集合になることと同値である。このような位相空間は **topologically partitioned** であるという。

命題 1.1.11. ([CW25]) 位相空間 X が $\mathbb{S}_\varphi$ -空間であるための必要十分条件は, X の任意個の開集合の交叉が開集合になることである. $\square$

証明. $\mathbb{S}$ 自身においても任意個の開集合の交叉が開集合になることを踏まえると, $\mathbb{S}_\varphi$ -空間において任意個の開集合の交叉も必ず開集合になることがわかる. 逆を示す. 点 $a \in X$ に対し, a を含む開集合全体の交叉を C_a とおく. このとき任意の $b \in C_a$ について, $a \in \text{Cl}b$ が成り立つので, 写像 $t: \mathbb{S} \rightarrow X, t(0) = a, t(1) = b$ は連続である. よって任意の $\mathbb{S}_\varphi$ -開集合 A とその点 a に対し, $C_a \subseteq A$ が成り立つ. 仮定より C_a は開集合なので, したがって A は開集合である. ■

命題 1.1.12. ([CW25]) $\mathbf{Haus}_\varphi = \mathbf{Top}$ である. $\square$

証明. 位相空間 X において, 閉集合でない集合 A が $\mathbf{Haus}_\varphi$ -閉でないことを示せばよい. 点 $p_0 \in \text{Cl}_A A \setminus A$ がとれる. $B := A \cup \{p_0\}$ とおき, B にはより細かい位相を入れる. すなわち部分空間 $A \subseteq B$ は離散位相とし, 点 $p_0 \in B$ の近傍はもとの部分空間 $A \cup \{p_0\} \subseteq X$ のときのままとする. このように B の各点の近傍を定義すると, これは集合 B 上に新たな位相を定める. もとの位相よりも細かいので包含写像 $B \rightarrow X$ は連続写像である. 空間 B においても $p_0 \in \text{Cl}_B A \setminus A$ が成立するので, A は B の閉集合ではない. X において $p_0 \in \text{Cl}_X \{a\}$ となるような点 $a \in A$ が存在しなければ, B は Hausdorff 空間となる. この場合は写像 $B \rightarrow X$ が $\mathbf{Haus}$ -テストマップとなるので, A が $\mathbf{Haus}_\varphi$ -閉集合でないことが導かれ証明完了である. そこで後は $p_0 \in \text{Cl}_X \{a_0\}$ となるような点 $a_0 \in A$ が存在する場合を考える. 写像 $t: \mathbb{N}^* \rightarrow X$ を $t(n) = a_0, t(*) = p_0$ と定義すると, これはテストマップになる. 一方で $t^{-1}[A] = \mathbb{N}$ は閉集合ではない. よって A は $\mathbf{Haus}_\varphi$ -閉ではない. ■

クラス $\mathcal{C}$ から構成されたクラス $\mathcal{C}_\varphi$ は終位相で閉じている. このことを主張するのが**命題 1.1.13**である. 特に直和や商空間をとる操作で閉じている. これは $\mathcal{C}_\varphi$ -空間という性質の重要な特徴である. これらの操作で閉じている位相的性質は数少ない. また一方で, もととなるクラス $\mathcal{C}$ に属する空間から直和と商をとる操作を組み合わせることで, 任意の $\mathcal{C}_\varphi$ -空間を構成できることがわかる (**命題 1.1.19**). 換言すれば, クラス $\mathcal{C}$ について直和や商をとるという操作の閉包として得られるクラスが $\mathcal{C}_\varphi$ に他ならないということである. 宣言的に定義された $\mathcal{C}_\varphi$ というクラスについて, 構成的な特徴づけができるのである.

命題 1.1.13. 連続写像の族 $(f_i: X_i \rightarrow Y \mid i \in I)$ が Y の位相を誘導しているとする. また各 X_i が $\mathcal{C}_\varphi$ -空間であるとする. このとき Y も $\mathcal{C}_\varphi$ -空間である. $\square$

証明. 恒等写像 $Y \rightarrow \mathcal{C}_\varphi Y$ が連続写像であることを示せばよい. そのためには仮定より, $X_i \xrightarrow{f_i} Y \rightarrow \mathcal{C}_\varphi Y$ が任意の i で連続であることを示せばよい. **命題 1.1.6** より, これらの写像は連続である. ■

命題 1.1.14. $\mathcal{C}_\varphi$ -空間は商写像で保たれる. すなわち, 位相空間 X が $\mathcal{C}_\varphi$ -空間であり, $f: X \rightarrow Y$ が商写像であれば, 位相空間 Y も $\mathcal{C}_\varphi$ -空間である. $\square$

証明. 命題 1.1.13 より従う. $\blacksquare$

命題 1.1.15. $\mathcal{C}_\varphi$ -空間は直和で保たれる. すなわち, $\mathcal{C}_\varphi$ -位相空間の族 $(X_i \mid i \in I)$ に対し, 直和空間 $\bigoplus_{i \in I} X_i$ も $\mathcal{C}_\varphi$ -空間である. $\square$

証明. 命題 1.1.13 より従う. $\blacksquare$

位相空間 X が $\mathcal{C}_\varphi$ -空間であることは, テストマップ $t: K \rightarrow X$ 全体がなすクラスから誘導される位相が X の位相に一致することと定義より同値である. これまで $\mathcal{C}$ は集合とは限らないクラスとして考えてきた. しかし位相空間 X をひとつ固定した場合には, テストマップのクラスはある集合で代替できる. このことを示しておこう. そのために一時的に次のような用語を導入しておく.

定義 1.1.16. 位相空間 X が $\mathcal{C}_\varphi$ -definable であるとは, ある集合で添字付けられたテストマップの族 $(t_i: K_i \rightarrow X \mid i \in I)$ から誘導される位相が X の位相に一致することである. $\square$

命題 1.1.17. 位相空間 X の位相を τ , $\mathcal{C}_\varphi X$ の位相を $\mathcal{C}_\varphi \tau$ と表すことにする. このとき $\mathcal{C}_\varphi \tau$ は, τ より細かい $\mathcal{C}_\varphi$ -definable な位相の中で最も粗いものである. $\square$

証明. 集合上の 2 つの位相 τ_1, τ_2 について, τ_1 が τ_2 より粗い位相をもつことを $\tau_1 \leq \tau_2$ と書くことにする. 位相空間 (X, τ) について $\tau \leq \mathcal{C}_\varphi \tau$ が成り立つことは既に繰り返し述べてきた. そこでまず $\mathcal{C}_\varphi \tau$ 自身が $\mathcal{C}_\varphi$ -definable であることを証明する. つまり $\mathcal{C}_\varphi X$ の位相を誘導するようなテストマップの族 $(t_i: K_i \rightarrow X \mid i \in I)$ が存在することを示す. 集合 I を $\mathcal{C}_\varphi X$ の非閉集合全体とする. $\mathcal{C}_\varphi X$ は $\mathcal{C}_\varphi$ -空間であるから (命題 1.1.3), それぞれの非閉集合 $A \in I$ について, あるテストマップ $t_A: K_A \rightarrow \mathcal{C}_\varphi X$ が存在して, $t_A^{-1}[A]$ は K_A の非閉集合になる. このとき $(t_A)_{A \in I}$ が $\mathcal{C}_\varphi X$ の位相を誘導する. 実際 X の任意の部分集合 B について, B が $\mathcal{C}_\varphi X$ の閉集合なら $t_A^{-1}[B]$ は常に閉集合であり, B が $\mathcal{C}_\varphi X$ の非閉集合なら $t_B^{-1}[B]$ が非閉集合になる.

次に $\mathcal{C}_\varphi \tau$ の最小性を示す. こちらは Straightforward である. 位相空間 (X, σ) が $\mathcal{C}_\varphi$ -definable であり, $\tau \leq \sigma$ であるとする. テストマップの族 $(t_i: K_i \rightarrow (X, \sigma) \mid i \in I)$ により誘導されているとする. $\tau \leq \sigma$ より, 各 t_i は位相 τ についても連続である. よって $A \subseteq X$ が位相 τ について $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合ならば, $t_i^{-1}[A]$ は K_i の閉集合になる. したがって $\mathcal{C}_\varphi \tau \leq \sigma$ である. $\blacksquare$

系 1.1.18. 位相空間 X が $\mathcal{C}_\varphi$ -空間であることは, X が $\mathcal{C}_\varphi$ -definable であることと同値である. $\blacksquare$

クラス $\mathcal{C}$ が空でない空間を要素にもつとき非退化と呼ぶことにする.

命題 1.1.19. クラス $\mathcal{C}$ は非退化だとする. このとき位相空間 X について以下は同値:

- (1) X が $\mathcal{C}_\varphi$ -空間である.
- (2) X が $\mathcal{C}$ に属する空間の直和空間の商空間である. □

証明. $\mathcal{C}$ に属する空間の直和空間の商空間が $\mathcal{C}_\varphi$ -空間になることは [命題 1.1.14](#) や [命題 1.1.15](#) 等から従う. 逆を示す. X が $\mathcal{C}_\varphi$ -空間であるとする. X が $\mathcal{C}_\varphi$ -definable であるから, X の位相を誘導するようなテストマップの族 $(t_i: K_i \rightarrow X \mid i \in I)$ が存在する.

テストマップの像の合併 $S := \bigcup_{i \in I} \text{Im } t_i$ が X に一致する場合のみ証明すれば十分である. このことは次のようにしてわかる. $\mathcal{C}$ に属する空間の直和空間 L からの商写像 $f: L \rightarrow X$ が構成できたとする. 仮定より, S は X の開閉集合であり, $X \setminus S$ は離散空間である. $\mathcal{C}$ から空でない空間 K_0 をひとつ選ぶと, 一点集合への自明な商写像 $g_0: K_0 \rightarrow *$ がとれる. g_0 の直和をとることで, 離散空間への商写像 $g: \bigoplus K_0 \rightarrow X \setminus S$ を作る. そして f と g の直和により, 商写像 $f \oplus g: L \oplus (\bigoplus K_0) \rightarrow X$ が構成できる.

$S = X$ が成立する場合には, 直和空間を $L := \bigoplus_i K_i$ として, 余対角写像を $f := \nabla_i t_i$ とすれば写像 $f: L \rightarrow X$ が商写像になる. ■

命題 1.1.20. クラス $\mathcal{C}$ は非退化だとする. クラスの等号 $\mathcal{C}_\varphi = \mathcal{C}$ が成り立つためには, クラス $\mathcal{C}$ が直和と商について閉じていることが必要十分である. ■

直和と商について閉じているクラス $\mathcal{C}$ をいくつか挙げてみよう.

- 位相空間 X の点 a が **P-点**であるとは, 点 a を要素にもつ G_δ 集合が点 a の近傍になることである. 任意の点が P-点であるような位相空間を **P-空間**と呼ぶ. P-空間であることは, 任意の G_δ 集合が開集合であることと同値である. P-空間全体のクラスは直和と商について閉じていることは Straightforward に証明できる. P-空間については [\[GJ76\]](#) や [\[PW88, 1W\]](#) などを参照せよ.
- 位相空間 X が **door 空間**であるとは, X の部分集合が開集合または閉集合になることである. door 空間のクラスは直和と商について閉じていることは, Straightforward に証明できる. door 空間については [\[Kel75\]](#) や [\[Don95\]](#) などを参照せよ.
- 位相空間 X が **局所連結空間**であるとは, 任意の点 $a \in X$ とその近傍 U に対し, $a \in N \subseteq U$ となるような連結近傍が存在することである. 位相空間 X が **弱局所連結空間**であるとは, 任意の点 $a \in X$ に対し, $a \in N$ となるような連結近傍 N が存在することである. 局所連結空間のクラスも弱局所連結空間のクラスも直和と商について閉じている. 直和で閉じていることの証明は簡単であるが, 商で閉じていることの証明は少し工夫が必要である. [\[Why52\]](#) や [\[PW88, 9E\]](#) などを参照せよ.

このようなクラス $\mathcal{C}$ があるとき, 任意の位相空間 X について $\mathcal{C}_\varphi X$ は $\mathcal{C}$ に属する. つまり位相

空間 X を $\mathcal{C}$ -化できるのである。P-空間化や door 空間化, 局所連結空間化, 弱局所連結空間化などである。場合によっては単なる散空間になってしまうが, 2^{ω_1} の P-空間化などは非自明な位相になる。このような構成によってどのような位相空間が得られるのかという問題は, 興味深い研究対象であるように思える。この方向の先行研究を筆者はあまり知らないが, [PW88] にあるように, これは位相空間の圏の co-reflection を考察する問題として捉えることもできる。また別の話題として, $\mathcal{C} = \mathcal{D}_\varphi$ となるような小さいクラス $\mathcal{D}$ を見つけよという問題も考えられる。これもまた筆者が深堀りできていない課題であるが, どのような結果が得られるのか気になるところである。

1.2 弱位相と $\mathcal{C}_\eta$ -空間

$\mathcal{C}_\varphi$ -空間ではクラス $\mathcal{C}$ から位相空間 X への連続写像全体を考えた。この定義を埋め込み写像に制限した概念として, 本節で述べる $\mathcal{C}_\eta$ -空間が与えられる。詳細な定義は後述する。埋め込まれた空間 K を X の部分空間と捉えることにすれば, $\mathcal{C}_\eta$ -空間は, $\mathcal{C}$ に属するような X の部分集合全体について弱位相をもつ空間のように見做せる。[Coh54] や [Bro64] などの少し古い文献においては, k -空間の定義がテストマップではなく部分集合により与えられていた。 $\mathcal{C}_\eta$ -空間を考察する動機はここに由来する。[Bro06] や [Die08], [Str09] などの現代的な文献では, 専ら $\mathcal{C}_\varphi$ -空間流の定義が採用されている。この 2 つの概念は特定の条件で一致するが, 微妙な差異がある。

位相空間 X に対し, クラス $\mathcal{C}$ に属する空間 K から X への埋め込み $i: K \rightarrow X$ のことを $\mathcal{C}$ -**テスト集合** ($\mathcal{C}$ -test set) という。文脈から $\mathcal{C}$ が明らかな場合は省略してテスト集合ともいう。埋め込みが定まっていることを文脈から判断できるときには i を省略し, 部分集合 $K \subseteq X$ のように扱うことにする。部分集合 $A \subseteq X$ が $\mathcal{C}_\eta$ -**閉集合**であるとは, 任意のテスト集合 K に対し, $A \cap K$ が K の閉集合であることをいう^{*4}。同様に $\mathcal{C}_\eta$ -**開集合**が定義される。定義より $\mathcal{C}_\eta$ -閉集合の補集合は $\mathcal{C}_\eta$ -開である。逆に $\mathcal{C}_\eta$ -開集合は $\mathcal{C}_\eta$ -閉集合の補集合である。また閉集合はもちろん $\mathcal{C}_\eta$ -閉であり, 開集合は $\mathcal{C}_\eta$ -開である。クラス $\mathcal{C}$ が同相写像について閉じているときには, $\mathcal{C}$ に属する部分集合 $K \subseteq X$ のみを考えても $\mathcal{C}_\eta$ -閉集合や $\mathcal{C}_\eta$ -開集合の条件は変わらない。

$\mathcal{C}_\varphi$ -空間のときと同様, $\mathcal{C}_\eta$ -開集合全体がなす部分集合族は集合 X 上に位相を定める。 $\mathcal{C}_\eta$ -閉集合で位相を与えても同じである。この位相を備えた空間を $\mathcal{C}_\eta X$ で表す。 $\mathcal{C}_\eta X$ は元の位相空間 X よりも細かい位相をもっている。つまり恒等写像 $\mathcal{C}_\eta X \rightarrow X$ が連続である。この 2 つの位相は一致するとは限らない。しかし一致するとき, X は $\mathcal{C}_\eta$ -空間であるという。これは恒等写像 $\mathcal{C}_\eta X \rightarrow X$ が同相写像ということと同じであり, $\mathcal{C}_\eta X = X$ とも表せる。また $\mathcal{C}_\eta$ -空間であるという性質は, 同相写像で不変な位相的性質であることに注意する。 $\mathcal{C}_\eta$ -空間全体がなすクラス

^{*4} $\mathcal{C}_\varphi$ -空間のときと同様, η という添字に深い意味はない。 η は被覆 (“hifuku”) の頭文字 h を意識している。

を $\mathcal{C}_\eta$ と書くことにする.

命題 1.2.1. 位相空間 X の部分集合 A について以下は同値:

- (1) A は $\mathcal{C}_\eta$ -閉集合である.
- (2) $\mathcal{C}$ に属するある空間 K と同相となるような任意の部分集合 $S \subseteq X$ に対し, $A \cap S$ が S の閉集合になる. ■

命題 1.2.2. X を位相空間, $\mathcal{C}$ に属するある空間 K と同相となるような部分集合 $S \subseteq X$ 全体の集合を $\mathcal{M}$ とする. このとき以下は同値:

- (1) X は $\mathcal{C}_\eta$ -空間である.
- (2) X は, 被覆とは限らない部分集合族 $\mathcal{M}$ について弱位相をもつ.
- (3) X は, $\mathcal{M}$ のある部分集合 $\mathcal{M}_0$ について弱位相をもつ. ■

位相空間の間の連続とは限らない写像 $f: X \rightarrow Y$ が $\mathcal{C}_\eta$ -連続写像であるとは, 任意のテスト集合 K について制限写像 $f|_K: K \rightarrow Y$ が連続であることをいう. 埋め込みとの合成 $K \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$ が連続と置き換えてもよい. 定義より連続写像はもちろん $\mathcal{C}_\eta$ -連続写像である. $\mathcal{C}_\eta$ -連続写像の集合を $\mathcal{C}_\eta(X, Y)$ と書くことにすると, $\mathcal{C}(X, Y) \subseteq \mathcal{C}_\eta(X, Y)$ となる. $\mathcal{C}_\varphi$ -連続写像のときとは異なり, $\mathcal{C}_\eta$ -連続写像の合成が $\mathcal{C}_\eta$ -連続になるとは限らない. 系列 $K \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ があったとき, ι が埋め込みであっても $f\iota$ が埋め込みとは限らないからである. しかし $\mathcal{C}$ が連続写像の像で閉じている場合には, 合成が $\mathcal{C}_\eta$ -連続になることが容易に示せる.

$\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合の定義で用いられるテストマップを埋め込みに制限したものが $\mathcal{C}_\eta$ -閉集合である. そのため $\mathcal{C}_\eta$ -閉集合の条件の方が弱く, $\mathcal{C}_\varphi$ -閉ならば $\mathcal{C}_\eta$ -閉である. ゆえに $\mathcal{C}_\eta$ -空間ならば $\mathcal{C}_\varphi$ -空間である. つまり $\mathcal{C}_\eta \subseteq \mathcal{C}_\varphi$ である. また $\mathcal{C}_\varphi$ -連続写像は $\mathcal{C}_\eta$ -連続である. つまり $\mathcal{C}_\varphi(X, Y) \subseteq \mathcal{C}_\eta(X, Y)$ である.

第 1.1 節で証明した命題について, $\mathcal{C}_\eta$ -空間における対応物を考えることができる.

命題 1.2.3. クラス $\mathcal{C}$ に属する空間は $\mathcal{C}_\eta$ -空間である. ■

命題 1.2.4. テスト集合 $\iota: K \rightarrow X$ に対し, $\iota'(x) = \iota(x)$ で定義される写像 $\iota': K \rightarrow \mathcal{C}_\eta X$ もテスト集合になる. □

証明. 写像 ι' が連続写像であることは $\mathcal{C}_\eta X$ の定義より示せる. $A \subseteq K$ が閉集合であれば, $\iota[A]$ は $\iota[K] \subseteq X$ の閉集合である. $\mathcal{C}_\eta X$ は X よりも細かい位相をもつので, $\iota'[A]$ は $\iota'[K] \subseteq \mathcal{C}_\eta X$ の閉集合である. よって ι' は埋め込みである. ■

命題 1.2.5. 位相空間 X に対し, $\mathcal{C}_\eta X$ は $\mathcal{C}_\eta$ -空間である. このことは $\mathcal{C}_\eta^2 X = \mathcal{C}_\eta X$ と表

せる. □

証明. 命題 1.2.4 を用いれば, 命題 1.1.3 のときと証明は同様である. ■

命題 1.2.6. 位相空間 X の部分集合 A が $\mathcal{C}_{\eta\eta}$ -閉集合であることは, $\mathcal{C}_\eta$ -閉集合であることに等しい. □

証明. これまでの命題と, 埋め込み写像の合成が再び埋め込みになることを利用すれば, 命題 1.1.4 のときの証明と同様である. ■

系 1.2.7. 位相空間 X について $\mathcal{C}_{\eta\eta}X = \mathcal{C}_\eta X$ が成り立つ. またクラスの等号 $\mathcal{C}_{\eta\eta} = \mathcal{C}_\eta$ も成立する. ■

命題 1.2.8. $\mathcal{C}_\eta$ -空間 X と位相空間 Y の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ について以下は同値:

- (1) f が連続である.
- (2) 写像 $f': X \rightarrow \mathcal{C}_\eta Y; x \mapsto f(x)$ が連続である.

つまり $\mathcal{C}_\eta$ -空間 X について全単射 $C(X, \mathcal{C}_\eta Y) \cong C(X, Y)$ が自然に成り立つ. ■

命題 1.2.9. 位相空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ について以下は同値:

- (1) f が $\mathcal{C}_\eta$ -連続写像である.
- (2) 写像 $f': \mathcal{C}_\eta X \rightarrow Y; x \mapsto f(x)$ が連続である.

つまり全単射 $\mathcal{C}_\eta(X, Y) \cong C(\mathcal{C}_\eta X, Y)$ が自然に成り立つ. 特に X が $\mathcal{C}_\eta$ -空間であれば, $\mathcal{C}_\eta$ -連続写像は単なる連続写像に他ならない. ■

命題 1.2.10. 位相空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ について以下は同値:

- (1) f が $\mathcal{C}_\eta$ -連続写像である.
- (2) f が $\mathcal{C}_{\eta\eta}$ -連続写像である. ■

$\mathcal{C}_\eta$ -空間は $\mathcal{C}_\varphi$ -空間であったが, 一般に逆は成り立たない. これはテスト集合が埋め込みであるという要請に起因する. 例えば $\mathbb{N}_\eta^*$ -空間と $\mathbb{N}_\varphi^*$ -空間を例にとって考えてみよう. どのような方法でもよいが, 要素が有限個の位相空間 X は常に $\mathbb{N}_\varphi^*$ -空間であることが示せる. 一方, $\mathbb{N}^*$ は有限集合に埋め込めないので $\mathbb{N}_\eta^* X$ は離散空間になる. よって有限な $\mathbb{N}_\eta^*$ -空間は離散空間のみである. 離散ではない有限な位相空間は無数に存在するので, $\mathbb{N}_\eta^*$ -空間でない $\mathbb{N}_\varphi^*$ -空間が存在することがわかる.

クラス $\mathcal{C}_\varphi$ は終位相で閉じているという特徴があったが, $\mathcal{C}_\eta$ に対応する命題は次のようになる.

命題 1.2.11. 位相空間 X が, 被覆とは限らない部分集合族 $(A_i \mid i \in I)$ について弱位相をもつとする. また各 A_i が $\mathcal{C}_\eta$ -空間であるとする. このとき X も $\mathcal{C}_\eta$ -空間である. □

証明. 命題 1.1.13 の証明と同様. ■

命題 1.2.12. $\mathcal{C}_\eta$ -空間は直和で保たれる. ■

$\mathcal{C}_\varphi$ -空間の場合とは異なり, $\mathcal{C}_\eta$ -空間は商で閉じているとは限らない. 例えば写像 $q: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{S}$ を, 無限遠点を 0, それ以外の点を 1 に写すものとする. これは商写像になっている. しかし $\mathbb{S}$ は $\mathbb{N}_\eta^*$ -空間ではない.

定義 1.2.13. 位相空間 X が $\mathcal{C}_\eta$ -definable であるとは, ある集合で添字付けられたテスト集合の族から誘導される位相が X の位相に一致することである. □

$\mathcal{C}_\varphi$ -空間については命題 1.1.17 が成り立つことをみたが, $\mathcal{C}_\eta$ -空間について対応する命題はそのまま平行な議論では証明できない. というのも, $\mathcal{C}_{\eta\tau}$ の最小性を示す部分において, テスト集合 $\iota_i: K_i \rightarrow (X, \sigma)$ が与えられたとき, $\iota'_i: K_i \rightarrow (X, \tau)$ は連続であることは証明できるが, 埋め込みであるかがわからない. しかしながら, 位相 $\mathcal{C}_{\eta\tau}$ が τ よりも細かい $\mathcal{C}_\eta$ -definable な位相であることは, 同様にして示せる. 命題 1.1.17 の証明をなぞるまでもなく, $\mathcal{C}_\eta$ -空間については命題 1.2.2 が成立していたので, $\mathcal{C}_\eta X$ は $\mathcal{C}_\eta$ -definable である.

系 1.2.14. 位相空間 X が $\mathcal{C}_\eta$ -空間であることは, X が $\mathcal{C}_\eta$ -definable であることと同値である. ■

命題 1.2.15. このとき任意の位相空間 X について以下は同値:

- (1) X が $\mathcal{C}_\eta$ -空間である.
- (2) テスト集合からなる (被覆とは限らない) 部分集合族について X が弱位相をもつ.
- (3) $\mathcal{C}_\eta$ -空間からなる (被覆とは限らない) 部分集合族について X が弱位相をもつ. ■

1.3 $\mathcal{C}_\varphi$ -分離性

$\mathcal{C}$ をコンパクト Hausdorff な空間全体のなすクラスとすると, Hausdorff な位相空間については $\mathcal{C}_\varphi$ -空間と $\mathcal{C}_\eta$ -空間は一致することが知られている. このように, 適当な分離公理が課された空間については $\mathcal{C}_\varphi$ -空間と $\mathcal{C}_\eta$ -空間は一致することがある. このことを一般化して調べるのが本節の目的である.

定義 1.3.1. X を位相空間とする.

- (1) X が $\mathcal{C}_\varphi$ -Hausdorff であるとは, 対角集合 Δ_X が積空間 $X \times X$ の $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合となることである.
- (2) X が $\mathcal{C}_\eta$ -Hausdorff であるとは, 対角集合 Δ_X が積空間 $X \times X$ の $\mathcal{C}_\eta$ -閉集合となることである.

(3) X が $\mathcal{C}_\varphi$ -普遍閉であるとは、テストマップ $t: K \rightarrow X$ が常に閉写像となることである。

(4) X が $\mathcal{C}_\eta$ -普遍閉であるとは、テスト集合 $\iota: K \rightarrow X$ が常に閉集合になることである。□

$\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合は $\mathcal{C}_\eta$ -閉集合であるので、 $\mathcal{C}_\varphi$ -Hausdorff は $\mathcal{C}_\eta$ -Hausdorff である。同様に、 $\mathcal{C}_\varphi$ -普遍閉は $\mathcal{C}_\eta$ -普遍閉である。

$\mathcal{C}$ を位相空間全体のクラスとすると、 $\mathcal{C}_\varphi$ -Hausdorff や $\mathcal{C}_\eta$ -Hausdorff は通常の Hausdorff 性に等しい。 $\mathcal{C}_\varphi$ -普遍閉や $\mathcal{C}_\eta$ -普遍閉は離散空間になることと同値である。 $\mathcal{C}$ を一点集合単体からなるクラスとすると、 $\mathcal{C}_\varphi$ -Hausdorff も $\mathcal{C}_\eta$ -Hausdorff も任意の位相空間について成立する。 $\mathcal{C}_\eta$ -普遍閉や $\mathcal{C}_\varphi$ -普遍閉は T_1 空間であることと同じである。

記号の注意をしておく。 $\mathcal{C}_\varphi$ -普遍閉という表記は、クラス $\mathcal{C}$ に対して定義されたものであり、クラス $\mathcal{C}_\varphi$ についてのものではない。相異なるクラス $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ について、クラスの等号 $\mathcal{C}_\varphi = \mathcal{D}_\varphi$ が成立したとしても、 $\mathcal{C}_\varphi$ -普遍閉と $\mathcal{D}_\varphi$ -普遍閉は同値にならない。例えば $\mathcal{C}$ を空間 2 がひとつあるだけのクラス、 $\mathcal{D}$ を離散空間全体のクラスとすると、 $\mathcal{C}_\varphi = \mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}$ であるが、 $\mathcal{C}_\varphi$ -普遍閉は T_1 -空間であることと、 $\mathcal{D}_\varphi$ -普遍閉は離散空間であることとそれぞれ同値である。しかしながら一方で、 $\mathcal{C}_\varphi = \mathcal{D}_\varphi$ であれば $\mathcal{C}_\varphi$ -Hausdorff と $\mathcal{D}_\varphi$ -Hausdorff は同じになる。なぜならば、 $\mathcal{C}_\varphi$ -閉と $\mathcal{C}_{\varphi\varphi}$ -閉が命題 1.1.4 より同値だからである。

命題 1.3.2. クラス $\mathcal{C}$ は非退化であり、かつ全ての要素が正則空間であるとする。このとき $\mathcal{C}_\varphi$ -普遍閉ならば $\mathcal{C}_\varphi$ -Hausdorff である。□

証明. 位相空間 X が $\mathcal{C}_\varphi$ -普遍閉であるとする。テストマップ $t: K \rightarrow X \times X$ を任意にとる。 $t^{-1}[\Delta_X]$ が閉集合であることを示す。点 $a \in K \setminus t^{-1}[\Delta_X]$ を任意にとる。 t を成分ごとに分解 $t = (t_1, t_2)$ する。点 a の近傍 N であって、 $N \cap t^{-1}[\Delta_X] = \emptyset$ となるものを構成できればよい。この条件は $t_1[N] \cap t_2[N] = \emptyset$ と同値である。

非退化という仮定から X が T_1 -空間であることがまずわかる。 $t_1(a) \neq t_2(a)$ であるから、 $a \notin t_2^{-1}(t_1(a))$ である。右辺は閉集合である。そこで正則空間という仮定より、 $N_2 \cap t_2^{-1}(t_1(a)) = \emptyset$ となる閉近傍 $a \in N_2$ が存在する。この N_2 について $t_1(a) \notin t_2[N_2]$ と $t_2(a) \in t_2[N_2]$ が成り立つ。 $\mathcal{C}_\varphi$ -普遍閉という仮定より $M_2 := t_2[N_2]$ は閉集合である。そこで補集合を M_1 とすると、 M_1 は $t_1(a)$ の開近傍であり、 $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ である。逆像を $N_1 := t_1^{-1}[M_1]$ とおくと、これも点 a の近傍である。そして $N := N_1 \cap N_2$ とおく。この N は点 a の近傍であり、かつ $t_1[N] \cap t_2[N] \subseteq M_1 \cap M_2 = \emptyset$ が成り立つ。■

命題 1.3.3. クラス $\mathcal{C}$ について次の 2 条件が成立しているとする：

- (1) 任意の $K, L \in \mathcal{C}$ に対し、積空間 $K \times L$ が $\mathcal{C}_\varphi$ -空間である。
- (2) 任意の $K, L \in \mathcal{C}$ に対し、射影 $p: K \times L \rightarrow L$ が閉写像である。

このとき $\mathcal{C}_\varphi$ -空間については、 $\mathcal{C}_\varphi$ -Hausdorff ならば $\mathcal{C}_\varphi$ -普遍閉である。□

証明. X を $\mathcal{C}_\varphi$ -Hausdorff な $\mathcal{C}_\varphi$ -空間とする. 任意にテストマップ $t: K \rightarrow X$ をとる. 閉集合 $F \subseteq K$ について $t[F]$ が閉集合であることを示す. そのためには, X が $\mathcal{C}_\varphi$ -空間であるから $t[F]$ が $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合であることを示せばよい. そこで任意にテストマップ $s: L \rightarrow X$ をとる. このとき

$$\begin{aligned} s^{-1}[t[F]] &= \{v \in L \mid (\exists u \in F)(t(u) = s(v))\} \\ &= p[\{(u, v) \in K \times L \mid t(u) = s(v) \text{ かつ } u \in F\}] \\ &= p[(t \times s)^{-1}[\Delta_X] \cap (F \times L)] \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $t \times s: K \times L \rightarrow X \times X$ は仮定より $\mathcal{C}_\varphi$ -テストマップである. $\mathcal{C}$ -テストマップと区別していることに注意する. また $\mathcal{C}_\varphi$ -Hausdorff という仮定もあったから, Δ_X は $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合であり, よって $(t \times s)^{-1}[\Delta_X] \cap (F \times L)$ は閉集合である. したがって p が閉写像という仮定より $s^{-1}[t[F]]$ は閉集合である. ■

注記 1.3.4. Kuratowski-Mrówka の定理 (定理 A.4.3) より, $\mathcal{C}$ の要素が全てコンパクトならば条件 (2) はみたされる. □

命題 1.3.5. ([CW25]) 位相空間 X が T_0 空間であることは, X が $2'_\varphi$ -Hausdorff であることと同値である. □

証明. X が T_0 空間であるとする. 任意にテストマップ $t: 2' \rightarrow X \times X$ をとる. $t(0) \in \Delta_X$ ならば $t(1) \in \Delta_X$ となることを示せばよい. t を成分ごとに分解 $t = (t_1, t_2)$ すると, t_1, t_2 はどちらも X へのテストマップである. よって $t_1(0), t_1(1)$ は位相的同値であり, $t_2(0), t_2(1)$ も同様である. $t(0) \in \Delta_X$ より $t_1(0) = t_2(0)$ なので, よって $t_1(1), t_2(1)$ は位相的同値である. X が T_0 空間であるから, したがって $t_1(1) = t_2(1)$ となる.

X が $2'_\varphi$ -Hausdorff であるとする. 位相的同値な点 $a, b \in X$ を任意にとる. このとき $t(0) = a, t(1) = b$ と $t'(0) = a, t'(1) = a$ で 2 つのテストマップ $t, t': 2' \rightarrow X$ を定める. 対角写像 $s = (t, t')$ もテストマップである. 対角集合 Δ_X が $2'_\varphi$ -閉集合であり, また $0 \in s^{-1}[\Delta_X]$ であるから, よって $1 \in s^{-1}[\Delta_X]$ となり, $a = b$ である. ■

命題 1.3.6. ([CW25]) 位相空間 X が T_1 空間であることは, X が $\mathbb{S}_\varphi$ -Hausdorff であることと同値である. □

証明. X が T_1 空間であるとする. 任意にテストマップ $t: \mathbb{S} \rightarrow X \times X$ をとる. $t(0) \in \Delta_X$ ならば $t(1) \in \Delta_X$ となることを示せばよい. t を成分ごとに分解 $t = (t_1, t_2)$ すると, t_i はどちらも X へのテストマップである. よって $t_i(0) \in \text{Cl}\{t_i(1)\}$ である. したがって $t(0) \in \text{Cl}\{t(1)\}$ である. X が T_1 空間であるから $t(0) = t(1)$ であり, ゆえに $t(1) \in \Delta_X$ である.

X が $\mathbb{S}_\varphi$ -Hausdorff であるとする. 2 点 $a, b \in X$ を任意にとり, $a \in \text{Cl}\{b\}$ であるとする.

このとき $t(0) = a, t(1) = b$ と $t'(0) = a, t'(1) = a$ で 2 つのテストマップ $t, t': \mathbb{S} \rightarrow X$ を定める. 対角写像 $s = (t, t')$ もテストマップである. また $0 \in s^{-1}[\Delta_X]$ であるから, よって $1 \in s^{-1}[\Delta_X]$ となり, $a = b$ である. ■

$\mathcal{C}_\eta$ -空間は常に $\mathcal{C}_\varphi$ -空間であった. この逆, $\mathcal{C}_\varphi$ -空間が $\mathcal{C}_\eta$ -空間になるための条件を考える. 第 1.2 節で述べたように, 一般にはこれは成立しない. テスト集合とテストマップにはそれが埋め込みであるか否かの違いがある. 次の命題はその差を埋めるための十分条件のひとつを与える. 作為的で捻りのない条件ではあるが, 有効範囲は意外と広い.

命題 1.3.7. 位相空間 X について, テストマップの像が常に $\mathcal{C}_\eta$ -空間であるとする. このとき $\mathcal{C}_\eta X = \mathcal{C}_\varphi X$ である. つまり $\mathcal{C}_\eta$ -閉集合は $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合である. □

証明. 部分集合 $A \subseteq X$ が $\mathcal{C}_\eta$ -閉集合であるとする. テストマップ $t: K \rightarrow X$ について, $t^{-1}[A]$ が閉集合であることを示したい. 仮定より $t[K]$ は $\mathcal{C}_\eta$ -空間であるから, 埋め込み写像 $\iota: t[K] \rightarrow X$ は $\mathcal{C}_\eta$ -テスト集合である. 命題 1.2.6 より A は $\mathcal{C}_{\eta\eta}$ -閉集合でもあるので, $A \cap t[K]$ は $t[K]$ の閉集合である. よって $t^{-1}[A]$ は閉集合である. ■

系 1.3.8. クラス $\mathcal{C}$ が連続写像の像で閉じているとする. つまり $\mathcal{C}$ に属する空間 X からの連続全射 $X \rightarrow Y$ が存在するとき $Y \in \mathcal{C}$ であるとする. このとき $\mathcal{C}_\eta$ -閉集合は $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合である. 特に, $\mathcal{C}_\varphi$ -空間が $\mathcal{C}_\eta$ -空間になる. ■

系 1.3.9. クラス $\mathcal{C}$ が閉連続写像の像が常に $\mathcal{C}_\eta$ -空間であるとする. このとき $\mathcal{C}_\varphi$ -普遍閉な空間において, $\mathcal{C}_\eta$ -閉集合は $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合である. ■

命題 1.3.10. 位相空間 X の部分集合 A について以下の条件を考える.

- (1) A が $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合である.
- (2) 任意のテストマップ $t: K \rightarrow X$ に対し, $A \cap t[K]$ が $t[K]$ の閉集合である.
- (3) 任意のテストマップ $t: K \rightarrow X$ に対し, $A \cap t[K]$ が X の閉集合である.

常に (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) が成り立つ. X が $\mathcal{C}_\varphi$ -普遍閉であれば (1) $\Rightarrow$ (3) も成り立つ. □

証明. Straightforward. (1) $\Rightarrow$ (3) は $t[t^{-1}[A]] = A \cap t[K]$ をとることに注目すればよい. ■

命題 1.3.11. X を位相空間, $\iota: K \rightarrow X$ を写像 $\iota': K \rightarrow \mathcal{C}_\eta X$ を同じ写像とする.

- (1) ι が埋め込みならば ι' も埋め込みである.
- (2) X が $\mathcal{C}_\varphi$ -普遍閉であるとする. このとき, ι' が埋め込みならば ι も埋め込みである. □

証明. (1) は命題 1.2.4 そのものである. (2) を示す. X が $\mathcal{C}_\varphi$ -普遍閉であるとする. $\mathcal{C}_\eta X$ の方が X より細かい位相をもつので, ι は連続である. 仮定より ι は閉写像である. ι' の単射性より ι が単射であることもわかるので, よって ι は埋め込みである. ■

1.4 $\mathcal{C}_\varphi$ -空間の構成

$\mathcal{C}$ に属する空間の直和や商をとることで $\mathcal{C}_\varphi$ -空間が構成できることを第 1.1 節でみた。積や部分空間をとるなどの操作をしたときにはどうなるかを考える。

まず積についてであるが、これは $\mathcal{C}_\varphi$ -空間と相性が悪い。例えば、 k -空間である $\mathbb{Q}^*$ の積 $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$ は k -空間ではない (第 3.2 節)。ただし局所コンパクト性などの仮定がある状況では、双積については保たれる。とはいえ、任意個の積では保たれない (第 3.3 節)。

命題 1.4.1. クラス $\mathcal{C}$ は以下の条件をみたすとする:

- (1) $\mathcal{C}$ は非退化である。
- (2) 任意の $K, L \in \mathcal{C}$ に対し、積空間 $K \times L$ は $\mathcal{C}_\varphi$ -空間である。
- (3) $\mathcal{C}$ の要素は全て局所コンパクトである。

このとき、局所コンパクトな $\mathcal{C}_\varphi$ -空間と単なる $\mathcal{C}_\varphi$ -空間の積は $\mathcal{C}_\varphi$ -空間である。 □

証明. X を局所コンパクトな $\mathcal{C}_\varphi$ -空間、 Y を $\mathcal{C}_\varphi$ -空間とする。命題 1.1.19 より、 $\mathcal{C}$ に属する空間の族 $(K_i)_i, (L_j)_j$ を用いて、直和 $K := \bigoplus_i K_i$, $L := \bigoplus_j L_j$ からの商写像 $q: K \rightarrow X$, $q': L \rightarrow Y$ が構成できる。このとき $K \times L \cong \bigoplus_{i,j} K_i \times L_j$ は仮定より $\mathcal{C}_\varphi$ -空間である。また仮定より L は局所コンパクトである。Whitehead の定理 (定理 A.3.2) より、 $K \times L \xrightarrow{q \times \text{id}} X \times L$ も $X \times L \xrightarrow{\text{id} \times q'} X \times Y$ も商写像である。よって積写像 $q \times q'$ は商写像である。以上より、 $X \times Y$ が $\mathcal{C}_\varphi$ -空間 $K \times L$ の商であることがわかるので、 $X \times Y$ は $\mathcal{C}_\varphi$ -空間である。 ■

一般に積で保たれないとはいえ、積空間について証明できる命題は複数ある。

命題 1.4.2. $\mathcal{C}_\varphi$ -連続な写像の族 $(f_i: X_i \rightarrow Y_i \mid i \in I)$ について、積写像 $\prod_i f_i: \prod_i X_i \rightarrow \prod_i Y_i$ も $\mathcal{C}_\varphi$ -連続である。 □

証明. 任意にテストマップ $t: K \rightarrow \prod_i X_i$ をとる。積写像 $f := \prod f_i$ との合成 $f \cdot t$ が連続であることを示すには、各 i について、射影 $q_i: \prod_i Y_i \rightarrow Y_i$ との合成 $q_i \cdot f \cdot t$ が連続であることを示せばよい。射影 $p_i: \prod_i X_i \rightarrow X_i$ について、下記の図式は可換である。ここで $p_i \cdot t$ は X_i へのテストマップになっているので、 f_i が $\mathcal{C}_\varphi$ -連続であることより、よって $q_i \cdot f \cdot t = f_i \cdot p_i \cdot t$ は連続である。

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{t} & \prod X_i & \xrightarrow{\prod f_i} & \prod Y_i \\ & & p_i \downarrow & & \downarrow q_i \\ & & X_i & \xrightarrow{f_i} & Y_i \end{array}$$
■

命題 1.4.3. 位相空間の族 $(X_i)_{i \in I}$ について、 $\mathcal{C}_\varphi(\prod_i X_i) = \mathcal{C}_\varphi(\prod_i \mathcal{C}_\varphi X_i)$ が成り立つ。 □

証明. $\prod_i \mathcal{C}_\varphi X_i$ の方が位相が細かいので, 恒等写像 $\mathcal{C}_\varphi(\prod_i X_i) \rightarrow \mathcal{C}_\varphi(\prod_i \mathcal{C}_\varphi X_i)$ が連続であることを示せばよい. そのためには $\prod_i X_i \rightarrow \prod_i \mathcal{C}_\varphi X_i$ が $\mathcal{C}_\varphi$ -連続写像であることを示せばよい. 各成分の写像が $\mathcal{C}_\varphi$ -連続であるから, 前の命題より証明される. ■

証明. (別証明) 任意の $K \in \mathcal{C}$ について自然に

$$\begin{aligned} C\left(K, \mathcal{C}_\varphi\left(\prod_i X_i\right)\right) &\cong C\left(K, \prod_i X_i\right) \\ &\cong \prod_i C(K, X_i) \\ &\cong \prod_i C(K, \mathcal{C}_\varphi X_i) \\ &\cong C\left(K, \prod_i \mathcal{C}_\varphi X_i\right) \\ &\cong C\left(K, \mathcal{C}_\varphi\left(\prod_i \mathcal{C}_\varphi X_i\right)\right) \end{aligned}$$

となる. $\mathcal{C}_\varphi(\prod_i X_i)$ も $\mathcal{C}_\varphi(\prod_i \mathcal{C}_\varphi X_i)$ も両方とも $\mathcal{C}_\varphi$ -空間なので, よって位相は一致する. ■

命題 1.4.4. $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合の任意個の積は $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合である. □

証明. 各 X_i の $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合 A_i をとる. $A := \prod_i A_i$ は $\prod_i \mathcal{C}_\varphi X_i$ の閉集合である. よって $\mathcal{C}_\varphi(\prod_i \mathcal{C}_\varphi X_i)$ の閉集合になるので, $\mathcal{C}_\varphi(\prod_i X_i)$ の閉集合である. つまり $\prod_i X_i$ の $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合である. ■

証明. (別証明) Straightforward. 各 X_i の $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合 A_i をとる. $A := \prod_i A_i$ とする. 任意にテストマップ $t: K \rightarrow \prod_i X_i$ をとる. t を成分に分解 $t = (t_i)$ すると, $t^{-1}[A] = \bigcap_i t_i^{-1}[A_i]$ である. 右辺は閉集合である. ■

命題 1.4.5. $\mathcal{C}_\varphi$ -Hausdorff は任意個の積で保たれる. □

証明. Straightforward. $X := \prod_i X_i$ としたとき, 対角集合 $\Delta \subseteq X \times X$ は, 各対角集合 $\Delta_i \subseteq X_i \times X_i$ の積 $\prod_i \Delta_i$ と自然に同相になる. そこで後は前述の命題を使えばよい. ■

命題 1.4.6. 空でない空間からなる族 (X_i) について積空間 $\prod_i X_i$ が $\mathcal{C}_\varphi$ -空間であるとする. このとき各 X_i も $\mathcal{C}_\varphi$ -空間である. □

証明. 各成分への射影が全射開写像になるので, $\mathcal{C}_\varphi$ -空間が商で保たれることより従う. ■

命題 1.4.7. クラス $\mathcal{C}$ は非退化であり, かつ要素が全てコンパクト Hausdorff であるとする. このとき $\mathcal{C}_\varphi$ -普遍閉は任意個の積で保たれる. □

命題 1.4.8. 各 $i \in I$ について X_i が $\mathcal{C}_\varphi$ -普遍閉であるとする. $\mathcal{C}$ が非退化なので, X_i は T_1 -空間である. 任意にテストマップ $t: K \rightarrow \prod_i X_i$ をとる. 成分ごとに分解 $t = (t_i)$ する. t_i

はテストマップなので閉写像である. K はコンパクトなので t_i は固有写像である*5. K は Hausdorff なので, 対角写像 $t = (t_i)$ も固有写像, 特に閉写像である. $\square$

次に, 部分空間について成立する命題をいくつか挙げる.

補題 1.4.9. 位相空間 X について, $\mathcal{C}_\varphi$ -空間からなる部分集合族 $(K_i \mid i \in I)$ について X が弱位相をもつならば, X は $\mathcal{C}_\varphi$ -空間である. $\blacksquare$

証明. 命題 1.1.13 の特殊な場合である. $\blacksquare$

補題 1.4.10. クラス $\mathcal{C}$ が $\mathcal{C}_\varphi$ について局所的であるとする. つまり, クラス $\mathcal{C}$ に属する任意の空間 X について, 任意の点 $a \in X$ とその近傍 $U \subseteq X$ に対し, a のある近傍 $V \subseteq U$ が存在して, V が $\mathcal{C}_\varphi$ -空間であるとする. このとき $\mathcal{C}$ に属する空間の開集合は $\mathcal{C}_\varphi$ -空間である. $\square$

証明. X が $\mathcal{C}$ に属する空間であるとする. X の開集合 $G \subseteq X$ を任意にとる. 仮定より, $\mathcal{C}_\varphi$ -空間からなる G の被覆 $(V_i)_i$ が存在して, $\bigcup_i \text{Int}_G V_i = G$ となる. このとき G は $(V_i)_i$ に対して弱位相をもつ. よって G は $\mathcal{C}_\varphi$ -空間である. $\blacksquare$

命題 1.4.11. クラス $\mathcal{C}$ が非退化だとする. さらに, クラス $\mathcal{C}$ に属する空間の開集合が常に $\mathcal{C}_\varphi$ -空間であるとする. このとき $\mathcal{C}_\varphi$ -空間は開集合に遺伝する. この命題は閉集合に置き換えても成立する. $\square$

証明. X が $\mathcal{C}_\varphi$ -空間であるとする. 命題 1.1.19 より, 商写像 $f: \bigoplus_i K_i \rightarrow X$ が存在する. ここで K_i は $\mathcal{C}$ に属する空間である. X の開集合 G を任意にとる. f を制限して得られる $f': f^{-1}[G] \rightarrow G$ も商写像である. 仮定より $f^{-1}[G]$ が $\mathcal{C}_\varphi$ -空間となるため, 再び命題 1.1.19 より G は $\mathcal{C}_\varphi$ -空間である. 閉集合についても同様である. $\blacksquare$

命題 1.4.12. X を位相空間, A を部分集合とする. もし A が $\mathcal{C}_\varphi$ -空間ならば, $\mathcal{C}_\varphi X$ の部分空間としての A の位相は, X の部分空間としての位相と一致する. $\square$

証明. X の位相を τ , 部分空間 A の位相を τ_A と書くことにする. この命題は $\tau_A = (\mathcal{C}_\varphi \tau)_A$ の成立を主張している. $\tau \leq \mathcal{C}_\varphi \tau$ であるから, $\tau_A \leq (\mathcal{C}_\varphi \tau)_A$ である. そこで後は逆を示せばよい.

A が $\mathcal{C}_\varphi$ -空間であるとする. $F \subseteq X$ が $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合だとして $F \cap A$ が A の閉集合であることを示す. A は $\mathcal{C}_\varphi$ -空間であるから, $F \cap A$ は $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合であることを示せばよい. 任意にテストマップ $s: K \rightarrow A$ をとる. 埋め込み $A \rightarrow X$ と合成して得られるテストマップを $t: K \rightarrow X$ とする. $s^{-1}[F \cap A] = t^{-1}[F]$ であるから, $F \cap A$ は $\mathcal{C}_\varphi$ -閉集合である. $\blacksquare$

*5 固有写像については付録 A.4 を参照.

第2章

C_φ -空間の各論

前章では C_φ -空間の一般論を述べた。本章では、具体的な空間クラス $\mathcal{C}$ について、どのように応用されるのかをみていく。

2.1 列型空間とその亜種

定義 2.1.1. X を位相空間とする。

- (1) 部分集合 $A \subseteq X$ が**列型閉集合**であるとは、点 $x \in X$ に収束する点列 (p_n) に対し、終局的に^{*1} $p_n \in A$ となるならば $x \in A$ となることである。
- (2) 部分集合 $A \subseteq X$ が**列型開集合**であるとは、点 $x \in X$ に収束する点列 (p_n) に対し、 $x \in A$ ならば終局的に $p_n \in A$ となることである。
- (3) 列型閉集合が閉集合になる空間を**列型空間 (sequential space)** と呼ぶ。 □

命題 2.1.2. 列型閉集合であることと、 $\mathbb{N}_\varphi^*$ -閉集合であることは同値である。また、列型開集合であることと、 $\mathbb{N}_\varphi^*$ -開集合であることは同値である。 □

証明. $A \subseteq X$ が列型閉集合であるとする。任意にテストマップ $t: \mathbb{N}^* \rightarrow X$ をとる。このとき点列 $p_n := t_n$ は点 $x := t(*)$ に収束している。 $x \in A$ の場合は $* \in t^{-1}[A]$ となるので $t^{-1}[A]$ は閉集合である。 $x \notin A$ であるとする。もし $t^{-1}[A]$ が無限集合ならば、 p_n の部分列 (q_n) を常に $q_n \in A$ となるようにとることができてしまい、 A が列型閉集合という仮定より $x \in A$ となり矛盾する。よって $t^{-1}[A] \subseteq \mathbb{N}$ は有限集合であり、これは閉集合である。

$A \subseteq X$ が $\mathbb{N}_\varphi^*$ -閉集合であるとする。任意に点列 (p_n) と点 $x \in X$ をとる。 $p_n \rightarrow x$ であり、終局的に $p_n \in A$ となるとする。写像 $t: \mathbb{N}^* \rightarrow X$ を $t(n) := p_n, t(*) := x$ と定めると、これは

^{*1} 終局的とは、十分大きな n についてその性質が成り立つことをいう。英単語の eventually に相当する。これに対し、いくらかでも大きい n についてその性質が成り立つことを**共終的**という。これらの用語は点列だけでなくネットにも拡張して使われる。

テストマップである。仮定より $t^{-1}[A]$ は無限集合である。これは閉集合でもあるから、よって $*$ も含まれる。したがって $x \in A$ である。

列型開集合についても同様に示せる。あるいは、列型閉集合と列型開集合がそれぞれ補集合の関係になっていることを証明して、そのことを利用してもよい。 ■

列型空間とは $\mathbb{N}_\varphi^*$ -空間と言い換えられることがわかった。記法を簡潔にするために $\mathbb{N}_\varphi^* X$ を sX のように書くなど、 $\mathbb{N}_\varphi^*$ を s に置き換えた表記を用いていくことにする。 s -Hausdorff や s -普遍閉といった調子である。 sX は X の列型閉集合を集めて位相とした位相空間である。 s -連続写像とは点列の収束を保つ連続写像のことであり、点列連続写像などとも呼ばれる。

命題 2.1.3. Fréchet 空間^{*2}は列型空間である。 □

証明. Straightforward. 位相空間 X の部分集合 A が列型閉であるとする。任意に触点 $x \in \text{Cl } A$ をとる。仮定より、 A 内のある点列 (p_n) が x に収束する。 A は列型閉なので $x \in A$ である。よって A は閉集合である。 ■

この命題により、第一可算空間などの初等的な空間の多くが列型空間であることが導かれる。Fréchet 空間ではない列型空間は存在し、例えば $\mathbb{R}$ の商空間であって Fréchet 空間でないものを考えればよい^{*3}。列型空間ではない例としては $\omega_1 + 1$ がある。後で述べるように列型空間は k -空間であるから、 k -空間ではない空間は列型空間でもない。

命題 2.1.4. 位相空間について以下の条件は同値である：

- (1) 列型空間である。
- (2) $\mathbb{N}^*$ の直和空間の商である。
- (3) 局所コンパクト距離空間の商空間である。
- (4) 距離空間の商空間である。 □

証明. 命題 1.1.19 より従う。距離空間の任意個の直和もまた距離化可能であることに注意する。 ■

位相空間 X において、収束する点列 $p_n \rightarrow x$ を用いて $\{p_0, p_1, \dots, x\}$ と表せる集合のことを極限点列集合と呼ぶ。テストマップ $t: \mathbb{N}^* \rightarrow X$ の像として表せる集合としても同値である。有限集合はいつでも極限点列集合である。テスト集合の定義ではその写像が埋め込みであることが要請されていたため、有限集合はテスト集合には該当しなかった。

^{*2} 定義は付録 A を参照。

^{*3} 各自然数 $n > 1$ について n と $1/n$ を同一視した空間がこの一例である。詳細は [児玉永見, 例 48.5] を参照せよ。

補題 2.1.5. X を s -普遍閉な空間, A を無限な極限点列集合とする. このとき A はテスト集合の像になる. □

証明. テストマップ $t: \mathbb{N}^* \rightarrow X$ をとり $A = \text{Im } t$ とする. このとき $\{n \in \mathbb{N} \mid t_n \neq t_\infty\}$ は無限集合である. この集合を小さい方から並べて $n_0 < n_1 < \dots$ とする. そして $t': \mathbb{N}^* \rightarrow X$ を $t'_i = t_{n_i}$, $t'_\infty = t_\infty$ と定める. これは連続単射であり, $\text{Im } t' = A$ である. X が s -普遍閉であるから t' は閉写像であり, よって埋め込みになっている. ■

系 2.1.6. X を s -普遍閉な空間とする. このとき極限点列集合は $\mathbb{N}_\eta^*$ -空間である. □

証明. 極限点列集合 A が有限集合ならば, X が T_1 -空間であることより, A は離散空間である. A が無限集合ならば, 補題より A はテスト集合の像になる. いずれにしても $\mathbb{N}_\eta^*$ -空間である. ■

命題 2.1.7. 位相空間について以下の条件は同値:

- (1) s -Hausdorff である.
- (2) 点列 Hausdorff である. つまり, X 内の点列の収束先は高々ひとつである. □

証明. Straightforward. ■

命題 2.1.8. 位相空間について以下の条件は同値である:

- (1) s -普遍閉である.
- (2) 極限点列集合が閉集合である. □

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は明らか. (2) $\Rightarrow$ (1) を示す. 任意にテストマップ $t: \mathbb{N}^* \rightarrow X$ をとる. A を $\mathbb{N}_\eta^*$ の閉集合とする. A が有限集合ならば, X が T_1 -空間であることより, その像は閉集合である. A が無限集合だとする. このとき A は無限集合を含むので, A の像は部分列による極限点列集合と見做すことができ, よって閉集合である. ■

命題 2.1.9. 列型空間について以下の条件は同値である:

- (1) s -普遍閉である.
- (2) 点列 Hausdorff である. □

証明. **命題 1.3.2** と **命題 1.3.3** より従う. 積空間 $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ が第一可算なので列型空間になることに注意する. ■

注記 2.1.10. 一般の位相空間について, s -普遍閉ならば列型であるが, 逆は成立しない (**第 3.5 節**). □

命題 2.1.11. 点列 Hausdorff 空間について以下の条件は同値である:

- (1) 列型空間である.
- (2) $\mathbb{N}_\eta^*$ -空間である.
- (3) 極限点列集合な部分集合全体からなる被覆について弱位相をもつ. ■

命題 2.1.12. (Boehme の定理) 局所コンパクトな列型空間と列型空間の積は列型である. ■

命題 2.1.13. 点列 Hausdorff も s -普遍閉も任意個の積で保たれる. ■

命題 2.1.14. 位相空間 X 内の点列 (p_n) と点 $a \in X$ について, X において (p_n) が a に収束することと, sX において (p_n) が a に収束することは同値である. □

証明. 命題 1.1.6 の言い換えである. ■

系 2.1.15. X を位相空間, A を部分集合とする. A が X の極限点列集合であることと, A が sX の極限点列集合であることは同値である. ■

命題 2.1.16. 列型空間の開集合も閉集合も列型空間である. □

証明. 愚直に示すことも容易である. もしくは命題 1.4.11 を適用してもよい. ■

2.2 k -空間とその亜種

定義 2.2.1. テストマップといえば, コンパクト Hausdorff 空間からの連続写像のことを指すことにする. 位相空間 X の部分集合 $A \subseteq X$ が k -閉集合であるとは, 任意のテストマップ $t: K \rightarrow X$ について, その逆像 $t^{-1}[A]$ が閉集合となることである. k -開集合も同様に定義する. k -閉集合全体から定まる位相を kX で表す. 位相空間 X が k -空間 (k -space) であるとは, 任意の k -閉集合が閉集合となることである. つまり $kX = X$ となることである. □

補題 1.4.9 や命題 A.3.1 などから, 以下のような空間が k -空間であることがわかる.

- 弱局所コンパクト Hausdorff 空間は k -空間である.
- 列型空間は k -空間である.
- k -空間の商空間や直和空間も k -空間である.

命題 2.2.2. 位相空間 X について以下の条件は同値である:

- (1) X は k -空間である.
- (2) X は局所コンパクト Hausdorff 空間の商空間である. ■

列型空間のときと同様, 記号を簡潔にするために, k -Hausdorff や k -普遍閉, k -連続写像といった表現を用いることにする. k -普遍閉な空間のことは, よく弱 Hausdorff 空間と呼ばれ

ている.

命題 2.2.3. k -空間について以下は同値:

- (1) 弱 Hausdorff である.
- (2) k -Hausdorff である. ■

補題 2.2.4. コンパクト Hausdorff 空間からの閉連続写像の像はコンパクト Hausdorff である. □

証明. [Bou98, §10.1, Corollary. 2]などを参照せよ. 他の証明方法として, 正規空間の閉写像の像が正規空間であることを利用してもよい. ■

命題 2.2.5. 弱 Hausdorff 空間において, $\mathbf{CptHaus}_\eta X = kX$ である. つまり, $A \subseteq X$ が k -閉集合であることは, 任意のコンパクト Hausdorff 部分集合 $K \subseteq X$ に対し, $A \cap K$ が K の閉集合であることと同値である. ■

命題 2.2.6. k -Hausdorff な位相空間 X について以下は同値:

- (1) X が k -空間である.
- (2) X が $\mathbf{CptHaus}_\eta$ -空間である.
- (3) X のコンパクト Hausdorff 部分集合全体からなる被覆について X が弱位相をもつ. ■

命題 2.2.7. 局所コンパクトな k -空間と k -空間の積は k -空間である. ■

命題 2.2.8. k -Hausdorff も弱 Hausdorff も任意個の積で保たれる. ■

命題 2.2.9. X を弱 Hausdorff な空間, A を部分集合とする. A が X のコンパクト Hausdorff 部分集合であることと, A が kX のコンパクト Hausdorff 部分集合であることは同値である. □

証明. 命題 1.3.11 の言い換えである. ■

系 2.2.10. Hausdorff 空間について以下は同値:

- (1) kX が離散空間である.
- (2) X のコンパクト集合が有限集合のみである. ■

命題 2.2.11. k -空間の開集合も閉集合も k -空間である. □

証明. 命題 1.4.11 を適用すればよい. その際, コンパクト Hausdorff 空間が局所コンパクトであることを利用する. ■

これまで $\mathcal{C} = \mathbf{CptHaus}$ の場合を考えてきた. これとは別に $\mathcal{C} = \mathbf{Cpt}$ の場合も考え

ることができる. k -空間の場合と異なり, $\mathbf{Cpt}$ が常に連続写像の像で閉じていることから, $\mathcal{C}_\varphi X = \mathcal{C}_\eta X$ が無条件で成立するなどの差異がある. またこの場合での $\mathcal{C}_\varphi$ -普遍閉には, **KC-空間**という名前がつけられている. 性質を記述していくことはできるが, 執筆時間が尽きてしまったので, 残りは読者に委ねることにする. 他にも [児玉永見, §47] では, $\mathcal{C}$ を可算な位相空間全体とした場合に相当する議論をしている. 興味のある読者はそちらも参照されたい.

第 3 章

具体例集

3.1 $\mathbb{Q}$ の一点コンパクト化 $\mathbb{Q}^*$

有理数空間 $\mathbb{Q}$ の一点コンパクト化を $\mathbb{Q}^*$ とする. 一点コンパクト化の定義や性質については [付録 A](#) を参照せよ.

位相空間 $\mathbb{Q}$ の基本的な性質を確認しておく. まず $\mathbb{Q}$ の点はコンパクト近傍をもたない. よって $\mathbb{Q}$ のコンパクト集合 K について $\text{Int } K = \emptyset$ が成り立つ. そのため, 集合 $A \subseteq K$ の補集合がコンパクトであれば, $\text{Cl } A = \mathbb{C}(\text{Int } A) = \mathbb{Q}$ より A は稠密である.

命題 3.1.1. $\mathbb{Q}^*$ は KC-空間である. よって弱 Hausdorff でも k -Hausdorff でもある. □

証明. A を $\mathbb{Q}^*$ のコンパクト部分集合とする. $A \subseteq \mathbb{Q}$ の場合には, $\mathbb{Q}$ の Hausdorff 性より A は $\mathbb{Q}$ の閉集合になるので, よって $\mathbb{Q}^*$ でも閉である. そこで $* \in A$ の場合を後は考えればよい.

$A_0 := A \cap \mathbb{Q}$ とおく. A_0 が $\mathbb{Q}$ の閉集合であることを示せばよい. もし仮に閉集合でなかったとする. 触点 $x \in (\text{Cl}_{\mathbb{Q}} A_0) \setminus A_0$ がとれる. 集合 A_0 内の点列 (p_n) を点 x に収束するようにとれる. $F_n := \{p_k \mid k \geq n\} \cup \{x\}$ とおく. F_n は $\mathbb{Q}$ のコンパクト閉集合なので, $\mathbb{Q}^*$ においても閉である. よって $F_n \cap A$ は A の閉集合である. A における閉集合の下降列 $(F_n \cap A)_n$ について, この列全体の交叉は空であるが, 途中で空集合にはなっていない. これは A のコンパクト性に矛盾する. ■

補題 3.1.2. $\mathbb{Q}^*$ 内の点列 (p_n) が無限遠点 $*$ に収束するための必要十分条件は, $\mathbb{Q}$ の任意のコンパクト集合 K に対し, $p_n \in K$ となる n が高々有限個になることである. □

証明. $\mathbb{Q}^*$ の位相の定義を用いて単純に言い換えただけである. ■

命題 3.1.3. $\mathbb{Q}^*$ は Hausdorff 空間ではない. □

証明. $\mathbb{Q}$ の点がコンパクト近傍をもたないことから導かれる. ■

補題 3.1.4. 第一可算かつ k -Hausdorff な空間は Hausdorff である. □

証明. X が第一可算かつ k -Hausdorff であるとする. $X \times X$ も第一可算であり, よって k -空間である. 対角集合 $\Delta \subseteq X \times X$ は仮定より k -閉集合なので, したがって閉集合になり, ゆえに X は Hausdorff である. ■

命題 3.1.5. $\mathbb{Q}^*$ は第一可算ではない. ■

命題 3.1.6. $\mathbb{Q}^*$ は Fréchet 空間である. □

証明. 部分集合 $A \subseteq \mathbb{Q}^*$ について $x \in \text{Cl} A$ が成立しているとする. $x \in \mathbb{Q}$ の場合は $x \in \text{Cl}_{\mathbb{Q}}(A \cap \mathbb{Q})$ より, $\mathbb{Q}$ が距離空間であることから $A \cap \mathbb{Q}$ 内のある点列が x に収束することがわかる. そこで後は $x = *$ かつ $A \subseteq \mathbb{Q}$ の場合を考えればよい. $*$ $\in \text{Cl} A$ であるから, $\mathbb{Q}$ の任意のコンパクト集合 K に対し $A \not\subseteq K$ となっている.

A が $\mathbb{Q}$ の非有界集合であれば, A 内の点列 (p_n) を絶対値 $|p_n|$ が正の無限大に発散するようにとれる. この点列は無限遠点 $*$ に収束する. そこで A が有界集合であるとする. 実数直線 $\mathbb{R}$ における閉包 $A_1 := \text{Cl}_{\mathbb{R}} A$ は有界閉集合なのでコンパクトである. もし仮に $A_1 \subseteq \mathbb{Q}$ ならば, A が $\mathbb{Q}$ のコンパクト部分集合 A_1 に含まれることになり矛盾する. よってある無理数 s が存在して, $\mathbb{R}$ において s は A の触点になる. 点 s に収束する点列 (p_n) を A の中からとれる. この点列 $(p_n) \subseteq \mathbb{Q}$ が無限遠点に収束している. なぜなら, K を $\mathbb{Q}$ の任意のコンパクト集合とすると, $s \notin K$ となり, 十分小さな $\varepsilon > 0$ について, s を中心とする半径 ε の開球は K と交わらず, 一方で (p_n) は終局的にこの開球に含まれるからである. ■

3.2 $\mathbb{Q}$ の一点コンパクト化の積 $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$

積空間 $X := \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$ を考える.

命題 3.2.1. X は k -空間ではない. □

証明. $\mathbb{Q}^*$ が Hausdorff ではないので, 対角集合 $\Delta \subseteq X$ は閉集合ではない. 一方で $\mathbb{Q}^*$ が k -Hausdorff であることから, 対角集合 Δ は k -閉集合である. このように一般に, k -Hausdorff だが Hausdorff でない空間の積は k -空間ではない. ■

命題 3.2.2. X は弱 Hausdorff である. よって k -Hausdorff でもある. □

証明. 弱 Hausdorff は積で保たれるため. ■

命題 3.2.3. X は KC-空間ではない. よって Hausdorff でもない. □

証明. 対角写像 Δ は $\mathbb{Q}^*$ と同相でありコンパクトだが閉集合ではない. ■

3.3 2 の非可算積 2^{ω_1}

離散空間 $2 = 2$ の非可算積 $X := 2^{\omega_1}$ を考える.

命題 3.3.1. 2^{ω_1} は k -空間である. □

証明. Tychonoff の定理より 2^{ω_1} はコンパクト Hausdorff 空間である. よって k -空間である. ■

空間 X の要素は写像 $f: \omega_1 \rightarrow 2$ と見做せる. 点 $f \in X$ に対し, その零点集合を $Z(f) := \{\alpha \in \omega_1 \mid f(\alpha) = 0\}$ と定める.

命題 3.3.2. 2^{ω_1} は列型空間ではない. □

証明. 集合 $A \subseteq X$ を

$$A := \{f \in X \mid Z(f) \text{ が可算集合}\}$$

と定める. この集合が列型閉集合であるが, 閉集合ではないことを示す.

列型閉集合であることを示すため, A 内の点列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が点 $f \in X$ に収束していると仮定する. このとき $Z(f) \subseteq \bigcup_n Z(f_n)$ が成り立つ. 各 $Z(f_n)$ が可算集合であるから $Z(f)$ は可算集合であり, よって $f \in A$ となる.

次に A が閉集合でないことを示す. 各 $\alpha \in \omega_1$ に対して写像 $f_\alpha \in X$ を

$$f_\alpha(\beta) := \begin{cases} 0 & \text{if } \beta < \alpha, \\ 1 & \text{if } \beta \geq \alpha \end{cases}$$

と定める. すると $Z(f_\alpha) = \alpha < \omega_1$ となるので, $f_\alpha \in A$ である. またネット $(f_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}$ は点 $0 \in X$ に収束する. ここで点 0 とは, 恒等的に 0 をとる写像のことである. ■

3.4 ω の非可算積 ω^{ω_1}

離散空間 ω の非可算積 $X := \omega^{\omega_1}$ を考える. 各成分 ω が Hausdorff 空間なので, X も Hausdorff 空間である.

命題 3.4.1. ω^{ω_1} は k -空間ではない. □

証明. 集合 $A \subseteq X$ であって, A は閉集合ではないが, 任意のコンパクト集合 $K \subseteq X$ に対して $A \cap K$ が K の閉集合となるようなものを構成する. 自然数 n に対して集合 A_n を

$$A_n := \left\{ f: \omega_1 \rightarrow \omega \mid \begin{array}{l} \text{任意の } \alpha \in \omega_1 \text{ に対して } f(\alpha) = 0 \text{ または } f(\alpha) = n, \\ \text{零点集合 } Z(f) \text{ の要素数が高々 } n \text{ である} \end{array} \right\}$$

とおく. そして合併を $A := \bigcup_n A_n$ と定める.

まず各 $A_n \subseteq X$ が閉集合であることを示す. そのために A_n 内のネット $(f_i)_{i \in I}$ が点 $f \in X$ に収束していると仮定する. 任意の $\alpha \in \omega_1$ について, 終局的に $f_i(\alpha) \in \{0, n\}$ であるから, $f(\alpha) = 0$ または $f(\alpha) = n$ であることがわかる. 次に $|Z(f)| \leq n$ であることを示す. もし仮に $f(\alpha_k) = 0$ となるような点が $n+1$ 個 $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ が存在したとする. 各 k について, 終局的に $f_i(\alpha_k) = 0$ となる. よって終局的に, 任意の k について $f_i(\alpha_k) = 0$ となる. 特にある $i_0 \in I$ で $\{\alpha_0, \dots, \alpha_n\} \subseteq Z(f_{i_0})$ となる. これは $f_{i_0} \in A_n$ に矛盾する.

次に A が閉集合でないことを示す. 恒等的に 0 をとる写像 $0 \in X$ に注目する. まず $0 \notin A$ が定義より直ちに従う. 点 0 が A の触点になることを示そう. ω_1 の有限集合 F 全体の集合を I とし, 包含関係による順序を入れる. 各 $F \in I$ に対して写像 $f_F \in A$ を $F \subseteq Z(f_F)$ となるようにとれる. そしてネット $(f_F)_{F \in I}$ は点 0 に収束する. よって $0 \in \text{Cl } A$ である.

任意にコンパクト集合 $K \subseteq X$ をとる. $A \cap K$ が K の閉集合であることを示そう. そのために $A \cap K$ 内のネット $(f_i)_{i \in I}$ が点 $f \in K$ に収束していると仮定する. $f \in A$ となることを証明できればよい. 各 i について $f_i \in A_{n_i}$ となるように $n_i \in \omega$ をとる. 集合 $N := \{n_i \mid i \in I\}$ を考える.

N は有限集合になる. もし仮に N が無限集合だとする. このとき $n_{i_0} < n_{i_1} < \dots$ となるように $i_0, i_1, \dots \in I$ がとれる. 集合 $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z(f_{i_k})$ は可算集合なので, 点 $\alpha_0 \in \omega_1$ を $\alpha_0 \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z(f_{i_k})$ となるようにとれる. このとき任意の $k \in \mathbb{N}$ について $f_{i_k}(\alpha_0) = n_k$ となる. 一方, K はコンパクト集合であったから, 任意の $\alpha \in \omega_1$ について集合 $\{g \in K \mid g(\alpha)\} \subseteq \omega$ は有限集合である. 矛盾が生じた. ゆえに N は有限集合である.

N が有限集合であるから, ある $n_0 \in N$ について $n_0 = n_i$ が共終的に成り立つ. そのような i 全体の集合 I' とすると, I' は順序集合 I の共終部分集合になっている. 部分ネット $(f_i)_{i \in I'}$ は点 $f \in K$ に収束する. また, この部分ネットの点は全て A_{n_0} にある. 集合 A_{n_0} は X の閉集合であったから $f \in A_{n_0}$ となる. よって $f \in A$ である. ■

注記 3.4.2. 空間 ω^{ω_1} は完全正則であるが正規ではない. 正規でないことの証明は [Eng89, 2.3.E.] を参照せよ. 正規であって k -空間でない例としては第 3.5 節が該当している. 他にも関数空間 $C_p(\mathbb{I}) = C_p(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ が正規であって k -空間でない空間として知られている. [Arh92, p. II.3.5.] などを参照せよ. □

注記 3.4.3. 空間 ω^{ω_1} は k -空間ではないが, $k_{\mathbb{R}}$ -空間になることは知られている. $k_{\mathbb{R}}$ -空間とは, 任意のコンパクト集合上で連続な実関数が全体でも連続になるような空間のことである. k -空間は $k_{\mathbb{R}}$ -空間である. 詳細は [BNS77, §2.3] を参照せよ. □

3.5 Arens-Fort 空間

$\mathbb{N}$ の一点コンパクト化の無限遠点を ∞ と書くことにする. $X_0 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ とおき, さらに一点 z_0 を追加した集合 $X := X_0 \cup \{z_0\}$ に以下のようにして位相を入れる. 写像 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ と自然数 k に対して集合 U_f^k を

$$U_f^k := \{(m, n) \in X_0 \mid f(m) \leq n \text{ かつ } k \leq m\} \cup \{z_0\}$$

と定める. X の各点 a に対し, $a \in X_0$ ならば X_0 のときの近傍基をそのまま用い, $a = z_0$ ならば U_f^k の形の集合全体を近傍基とする. これは X 上の位相を定める. U_f^k は X の開集合であり, 部分空間としての X_0 の位相は元々の位相に一致する. 自然数 k, m に対して $T_m^k := \{(m, n) \in X_0 \mid n \geq k\}$ とおくと, $\{T_m^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ は点 $(m, \infty) \in X$ の近傍基になっている. また部分空間として $Y := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{z_0\}$, $Y_0 := X_0 \cap Y = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ とおく. Y の一点コンパクト化を $Y^* = Y \cup \{*\}$ とする. この空間 Y については [Are50] や [SS95] に記述がある.

命題 3.5.1. X と Y は T_5 -空間である. □

証明. X が可算集合であることと, 一般に正則 Lindelöf な空間は正規であることを踏まえると, X が T_3 -空間であることを証明すればよい. 定義より直ちに T_2 であることがわかる. 正則であることを示すためには, X の各点 a が開閉集合からなる近傍基をもつことを利用すればよい. 実際, $a = (m, n) \in Y_0$ の場合は一点集合 $\{a\}$ が, $a = (m, \infty) \in Y_0$ の場合は集合 T_m^k が, $a = z_0$ の場合は集合 U_f^k が開閉集合な近傍となっている. ■

命題 3.5.2. $\text{Cl} Y_0 = X$ であるが, Y_0 の内の点列であって z_0 に収束するものは存在しない. よって X は Fréchet 空間ではない. □

証明. 任意の自然数 m に対して $(m, \infty) \in \text{Cl} Y_0$ であることと, 点列 (m, ∞) が z_0 に収束することが定義より従うので, Y_0 の閉包が X であることがわかる. Y_0 内の点列 (m_i, n_i) を任意にとる. 集合 $M := \{m_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ が有限集合なら, $\max M < k$ となるように自然数 k をとれば適当な f について $(m_i, n_i) \notin U_f^k$ となるので, z_0 に収束しないことがわかる. M が無限集合だとする. 各 $m \in M$ に対し, $m = m_i$ となる i をひとつとり, $n_i < f(m)$ となるように関数 f を定める. M 以外の点 $k \in \mathbb{N}$ に対しては $f(k)$ は適当な値としてよい. すると近傍 U_f^0 について, $(m_i, n_i) \notin U_f^0$ となる i が共終的に存在する. よって (m_i, n_i) は z_0 に収束しない. ■

命題 3.5.3. X は列型空間である. □

証明. A が列型閉集合だとして閉集合になることを示す. 任意に触点 $x \in \text{Cl} A$ をとる. $x \in Y_0$ の場合は x が孤立点なので $x \in A$ となる. $x = (m, \infty)$ の場合は, 常に $T_m^k \cap A \neq \emptyset$ であるこ

とから $n_0 < n_1 < \dots$ を $(m, n_i) \in A$ となるようにとることができ、そしてこの点列 (m, n_i) が (m, ∞) に収束する。そこで残りは $x = z_0$ の場合を考える。 $z_0 \notin A$ と仮定してよい。このとき $(m, \infty) \in \text{Cl } A$ となる m が共終的に存在することが示せる。なぜならば、もしそうでないと仮定すると、ある k_0 以上の m に対して $T_m^{f(m)} \cap A = \emptyset$ となる $f(m)$ が存在し、このとき $U_f^{k_0} \cap A = \emptyset$ となり矛盾するからである。このような m について、 A が列型閉という仮定より $(m, \infty) \in A$ となることがわかり、そして並べて得られる点列 (m_i, ∞) が z_0 に収束する。よって再び列型閉という仮定より $z_0 \in A$ となる。 ■

命題 3.5.4. Y のコンパクト集合は有限集合である

証明. コンパクト集合 $K \subseteq Y$ が有限集合であることを示す。 $K \subseteq Y_0$ の場合は、 Y_0 が離散空間であることから有限性が従う。そこで後は、 $z_0 \in A$ となる任意の無限集合 $A \subseteq Y$ がコンパクトでないことを示せばよい。 $A_0 := A \cap Y_0$ とおく。 A_0 の第一成分への射影を $M \subseteq \mathbb{N}$ とおく。もし M が有限集合ならば、 z_0 が A の孤立点になってしまい、 A が離散空間な無限集合となってしまうのでコンパクトではない。 M が無限集合だとする。各 $m \in M$ に対し、 $(m, n) \in A$ となる最小の n を $f(m)$ と書くことにする。また関数 $g_m: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を

$$g_m(n) = \begin{cases} f(m) & \text{if } n = m \\ f(n) + 1 & \text{if } n \neq m \text{ かつ } n \in M \\ 0 & \text{if } n \notin M \end{cases}$$

と定める。すると開集合の列 $\{U_{g_m}^0 \mid m \in M\}$ は A の被覆になっているが、有限部分被覆をもたない。よってこの場合も A はコンパクトではない。 ■

命題 3.5.5. Y は k -空間ではない。 □

証明. Y の任意の部分集合が k -閉集合となるが、 Y は離散位相ではない。よって Y は k -空間ではない。 ■

命題 3.5.6. Y^* は点列 Hausdorff であるが s -普遍閉ではない。 □

証明. 点列 Hausdorff であることを示すためには、点列 (p_i) が点 $a \in Y$ と $*$ に同時に収束しないことを示せばよい。 $a \in Y_0$ ならば、終局的に $p_i = a$ となる必要があり、 $*$ に収束することはない。 $a = z_0$ とする。 **命題 3.5.2** より、共終的に $p_i \in Y_0$ とはならない。よって終局的に $p_i \in \{z_0, *\}$ であるが、 Y^* は T_1 なので同時に両方に収束することはない。

点列 (p_i) を Y_0 と全単射になるようにとる。 Y のコンパクト集合は有限集合だったので、 (p_i) は無限遠点 $*$ に収束する。一方で集合 $A := Y_0 \cup \{*\}$ は、 $z_0 \in \text{Cl } A$ であるため閉集合でない。よって Y^* は s -普遍閉ではない。 ■

付録 A

関連用語

補足となる定義や命題を記載しておく.

A.1 諸定義

定義 A.1.1. X を位相空間とする.

- (1) X が**第一可算空間**であるとは, 各点が可算な近傍基をもつことである.
- (2) X が**第二可算空間**であるとは, X の位相が可算な開基をもつことである.
- (3) X が**Fréchet 空間**であるとは, 任意の部分集合 $A \subseteq X$ とその触点 $x \in \text{Cl} A$ に対し, A 内のある点列 (p_n) が存在して x に収束することである. Fréchet-Urysohn 空間とも呼ばれる. □

命題 A.1.2. 次が成り立つ:

- (1) 第二可算な空間は第一可算である.
- (2) 第二可算な空間は Fréchet 空間である. ■

位相空間の 2 点 a, b が**位相的同値**であるとは, a, b の片方のみを含む開集合が存在しないことをいう. 位相空間 X が T_0 -空間であるとは, 任意の 2 点 a, b について, a, b が位相的同値ならば $a = b$ となることをいう.

本誌での正則空間や正規空間は T_1 -空間であることを仮定していない. T_1 かつ正則な空間を T_3 -空間と定義する. 同様に, T_1 かつ正規な空間が T_4 -空間であり, T_1 かつ遺伝的正規な空間が T_5 -空間である. こうすると, $i \leq j$ について, T_i ならば T_j が成り立つ.

命題 A.1.3. 位相空間 X について以下は同値:

- (1) X は遺伝的正規である.
- (2) X の開部分集合が全て正規である.

(3) X の離れた集合が開集合で分離できる. □

証明. [森田 81, 定理 19.8] や [Eng89, Theorem 2.1.7] などを参照. ■

A.2 一点コンパクト化

定義 A.2.1. 位相空間 X について:

- (1) X が**局所コンパクト (locally compact)** であるとは, 任意の点 $a \in X$ とその近傍 U に対し, $a \in N \subseteq U$ となるようなコンパクト近傍 N が存在することである.
- (2) X が**弱局所コンパクト^{*1}**であるとは, 任意の点 $a \in X$ に対し, $a \in N$ となるようなコンパクト近傍 N が存在することである. □

命題 A.2.2. 位相空間 X が Hausdorff であるとする. このとき以下の条件は同値である:

- (1) X は局所コンパクトである.
- (2) X は弱局所コンパクトである.
- (3) X はコンパクト閉近傍をもつ. ■

定義 A.2.3. X を位相空間とする. X の**一点コンパクト化 (one-point compactification)** X^* が以下のように構成される: X に属さない点 $*$ を加えて集合として $X^* = X \cup \{*\}$ とする. X^* の閉集合は, 以下のものからなる:

$$\begin{cases} F \cup \{*\} & F \text{ は } X \text{ の閉集合} \\ F & F \text{ は } X \text{ のコンパクト閉集合} \end{cases}$$

コンパクト集合の閉集合がコンパクトになることから, 上記のように定義した閉集合は X^* が位相をなすことがわかる. 追加した点 $*$ を ∞ と書くこともある. □

命題 A.2.4. 一点コンパクト化 X^* について以下の性質が成り立つ:

- (1) X^* はコンパクトである.
- (2) X^* の開集合は以下のものからなる:

$$\begin{cases} U & U \text{ は } X \text{ の開集合} \\ U \cup \{*\} & U \text{ は } X \text{ の開集合であり, 補集合 } X \setminus U \text{ がコンパクト} \end{cases}$$

- (3) 部分空間 $X \subseteq X^*$ は開集合であり, 部分空間としての位相は元々の位相と一致する.
- (4) X が X^* の稠密部分集合であるための必要十分条件は, X がコンパクトでないことである.

^{*1} 一般的な名称ではない

- (5) X^* が T_1 であるための必要十分条件は, X が T_1 であることである.
- (6) X^* が Hausdorff になるための必要十分条件は, X が Hausdorff であり, かつ X の各点がコンパクト閉近傍をもつことである. ■

具体例 A.2.5. ($\mathbb{N}$ の一点コンパクト化 $\mathbb{N}^*$) 離散空間 $\mathbb{N}$ の一点コンパクト化を $\mathbb{N}^*$ と書く. 部分集合 $A \subseteq \mathbb{N}^*$ が閉集合になるための必要十分条件は, $*$ $\in A$ であるか, あるいは有限集合となることである. □

A.3 商写像と弱位相

命題 A.3.1. 位相空間 X の部分集合族 $(K_i \mid i \in I)$ について以下の条件を考える:

- (1) (K_i) は局所的である. つまり, 任意の点 a とその近傍 U に対し, ある i について K_i は点 a の近傍であり, さらに $a \in K_i \subseteq U$ が成り立つ.
- (2) (K_i) は弱局所的である. つまり, 任意の点 a に対し, ある i について K_i は点 a の近傍となる.
- (3) 任意の部分集合 $A \subseteq X$ と触点 $p \in \text{Cl } A$ に対し, ある $i \in I$ が存在して $p \in \text{Cl}_{K_i} A \cap K_i$ となる.
- (4) X は (K_i) について弱位相をもつ.

このとき $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$ が成り立つ. □

証明. ほとんど定義より自明である. $(3) \Rightarrow (4)$ のみ示す.

$(3) \Rightarrow (4)$: Straightforward. 部分集合 $A \subseteq X$ について, 各 $i \in I$ について $A \cap K_i$ が K_i の閉集合であるとする. このとき A が X の閉集合であることを示せばよい. 任意の点 $p \in \text{Cl } A$ をとる. 仮定よりある i が存在して $p \in \text{Cl}_{K_i} (A \cap K_i)$ が成り立つ. 仮定より $A \cap K_i$ は K_i の閉集合であるから, $\text{Cl}_{K_i} (A \cap K_i) = A \cap K_i$ である. よって $p \in A \cap K_i \subseteq A$ となる. したがって A は閉集合である. ■

定理 A.3.2. (Whitehead の定理) Z が局所コンパクトであるとする. このとき任意の商写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して $f \times \text{id}_Z$ は商写像である. □

証明. [児玉永見]などを参照せよ. ■

注記 A.3.3. コアコンパクト空間という概念がある. Z がコアコンパクトであるための必要十分条件が, 任意の商写像 f との積が商写像になることであることが知られている. [Gou13, Exercise 5.4.29] を参照せよ. Hausdorff 空間に限定すると, コアコンパクトと局所コンパクトは同値である. □

A.4 固有写像

定義 A.4.1. 位相空間の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が**固有写像** (**proper map**) あるいは**完全写像** (**perfect map**) であるとは, f が閉写像であり, 任意の点 $y \in Y$ に対してファイバー $f^{-1}(y)$ がコンパクトであることをいう. □

命題 A.4.2. 位相空間の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ について以下は同値:

- (1) f は固有写像である.
- (2) 任意の位相空間 Y に対して $f \times \text{id}_Y$ が閉写像である. □

証明. [Bou98, §10.2, Theorem. 1] を参照. ■

定理 A.4.3. (Kuratowski-Mrówka の定理) 位相空間 X について以下の条件は同値:

- (1) X はコンパクトである.
- (2) 定値写像 $f: X \rightarrow *$ が固有写像である.
- (3) 任意の位相空間 Y に対して, 射影 $p: X \times Y \rightarrow Y$ が閉写像である. ■

命題 A.4.4. 固有写像は任意個の積で保たれる. □

証明. [Bou98, §10.2, Lemma. 2] あるいは [PW88, 1.8.(g)] を参照せよ. ■

命題 A.4.5. Hausdorff 空間 X からの固有写像の対角写像は固有写像である. つまり $(f_i: X \rightarrow Y_i \mid i \in I)$ が固有写像の族ならば, 対角写像 $\Delta_i f_i: X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$ も固有写像である. ■

参考文献

- [Are50] Richard Arens. “Note on convergence in topology”. In: *Math. Mag.* 23 (1950), pp. 229–234.
- [Arh92] A. V. Arhangel’skiĭ. *Topological function spaces*. Vol. 78. Mathematics and its Applications (Soviet Series). Translated from the Russian by R. A. M. Hoksbergen. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992, pp. x+205.
- [BNS77] Edward Beckenstein, Lawrence Narici, and Charles Suffel. *Topological algebras*. North-Holland Mathematics Studies, Vol. 24. Notas de Matemática [Mathematical Notes], No. 60. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977, pp. xii+370.
- [Bou98] Nicolas Bourbaki. *General topology. Chapters 1–4*. Elements of Mathematics (Berlin). Translated from the French, Reprint of the 1989 English translation. Springer-Verlag, Berlin, 1998, pp. vii+437.
- [Bro64] R. Brown. “Function spaces and product topologies”. In: *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 15 (1964), pp. 238–250.
- [Bro06] Ronald Brown. *Topology and groupoids*. BookSurge, LLC, Charleston, SC, 2006, pp. xxvi+512.
- [CW25] Steven Clontz and Marshall Williams. *Separation Axioms Among US*. 2025. arXiv: [2502.16764](https://arxiv.org/abs/2502.16764) [[math.GN](https://arxiv.org/archive/math)].
- [Coh54] D. E. Cohen. “Spaces with weak topology”. In: *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 5 (1954), pp. 77–80.
- [Die08] Tammo tom Dieck. *Algebraic topology*. English. Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2008, pp. xi + 567.
- [Don95] Julian Dontchev. “On door spaces”. In: *Indian J. Pure Appl. Math.* 26.9 (1995), pp. 873–881.
- [Eng89] Ryszard Engelking. *General topology. Rev. and compl. ed.* English. Rev. and compl. ed. Vol. 6. Berlin: Heldermann Verlag, 1989, pp. viii + 529.

- [ELS04] Martín Escardó, Jimmie Lawson, and Alex Simpson. “Comparing Cartesian closed categories of (core) compactly generated spaces”. In: *Topology Appl.* 143.1-3 (2004), pp. 105–145.
- [GJ76] Leonard Gillman and Meyer Jerison. *Rings of continuous functions*. Graduate Texts in Mathematics, No. 43. Reprint of the 1960 edition. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976, pp. xiii+300.
- [Gou13] Jean Goubault-Larrecq. *Non-Hausdorff topology and domain theory*. Vol. 22. New Mathematical Monographs. [On the cover: Selected topics in point-set topology]. Cambridge University Press, Cambridge, 2013, pp. vi+491.
- [Kel75] John L. Kelley. *General topology*. Graduate Texts in Mathematics, No. 27. Reprint of the 1955 edition [Van Nostrand, Toronto, Ont.] Springer-Verlag, New York-Berlin, 1975, pp. xiv+298.
- [PW88] Jack R. Porter and R. Grant Woods. *Extensions and absolutes of Hausdorff spaces*. Springer-Verlag, New York, 1988, pp. xiv+856.
- [SS95] Lynn Arthur Steen and J. Arthur Seebach Jr. *Counterexamples in topology*. Reprint of the second (1978) edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1995, pp. xii+244.
- [Str09] Neil P Strickland. “The category of CGWH spaces”. In: *preprint* 12 (2009), p. 90.
- [Why52] G. T. Whyburn. “On quasi-compact mappings”. In: *Duke Math. J.* 19 (1952), pp. 445–446.
- [児玉永見] 児玉之宏・永見啓応. **位相空間論**. 岩波書店, 1974, pp. vii + 421.
- [森田 81] 森田紀一. **位相空間論**. 岩波書店, 1981, pp. vii + 273.

索引

C_η -definable, 18

C_η -開集合, 15

C_η -空間, 15

C_η -Hausdorff, 18

C_η -普遍閉, 19

C_η -閉集合, 15

C_η -連続写像, 16

C -generated space, 8

C_φ -continuous map, 8

C_φ -definable, 13

C_φ -開集合, 8

C_φ -空間, 8

C_φ -Hausdorff, 18

C_φ -普遍閉, 19

C_φ -閉集合, 8

C -test map, 8

C -test set, 15

C -生成空間, 8

C -テスト集合, 15

C -テストマップ, 8

C_φ -連続写像, 8

door 空間, 14

Fréchet 空間, 37

k -space, 28

k -開集合, 28

k -空間, 28

k -閉集合, 28

KC-空間, 30

locally compact, 38

one-point compactification, 38

P-空間, 14

P-点, 14

perfect map, 40

proper map, 40

sequential space, 25

topologically partitioned, 11

位相の同値, 37

一点コンパクト化, 38

完全写像, 40

共終的, 25

極限点列集合, 26

局所コンパクト, 38

局所連結空間, 14

固有写像, 40

弱 Hausdorff 空間, 28

弱局所コンパクト, 38

弱局所連結空間, 14

終局的, 25

第一可算空間, 37

第二可算空間, 37

非退化, 13

列型開集合, 25

列型空間, 25

列型閉集合, 25